Der

Geist der mathemathischen Analysis

und

ihr Verhältniß zur Schule.

Von

Dr. Martin Ohm,

Ritter des rothen Adler-Ordens vierter Klasse, ordentl. öffentlicher Professor an der Königl. Friedrich Wilhelms-Universität, Lehrer an der Königl. allgemeinen Kriegs-Schule und an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften correspondirendes Mitglied.

Erste Abhandlung.

Auch als Anhang und Kommentar zu seinen verschiedenen Lehrbüchern.

Berlin.

Verlag von Duncker und Humblot.

1842.

186. D.

Ag

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Es giebt Bedürfnisse, deren Befriedigung der Mensch zwar auf kürzere oder längere Zeit zurückdrängen, aber nie ganz von sich abweisen kann. So gehört das Bedürfniß zu philosophiren für den Menschen zu den Unabweisbaren, und so erklärt sich's, wie immer ein neues philosophisches System das vorhergehende in das Gebiet der Geschichte des menschlichen Geistes zurückdrängt, um dem nun bald folgenden selbst wieder Platz zu machen. So sieht auch der, bloß mit der Herbeischaffung neuer Materialien beschäftigte Mathematiker meist theilnamlos, ja zuweilen mit vornehmer Geringschätzung auf jedes Bestreben, der Mathematik eine festere und befriedigendere Grundlage zu geben, während häufig seine eigenen Arbeiten hinreichend durchblicken lassen, daß auch er das Bedürfniß danach nicht ganz hat von sich abweisen können.

Der Verfasser theilt hier, so kurz als es ihm nur immer möglich gewesen ist, das Wesen der Ansichten mit, welche derselbe in seinen Schriften seit 1816, besonders aber seit 1822 gelehrt hat und lehrt, — Ansichten, welche das Glück gehabt haben, in seinen verschiedenen Lehrbüchern vielfachen Beifall zu finden, welche aber auch vielfältig

mißverstanden worden sind, und wahrscheinlich deshalb leichter mißverstanden werden konnten, weil ein Lehrbuch noch so manches andere zu berücksichtigen hat, welches das Auffassen des Wesens der Sache erschwert. Gegenwärtige kleine Schrift setzt voraus, daß der Leser alles Material selbst einschalte, und beschäftigt sich bloß mit der Aufstellung logisch bestimmter, scharfer und entschiedener Begriffe und zwar aller derer, um welche sich die mathematische Analysis herumdreht. Der Leser möge nun dieser Darstellung einige Aufmerksamkeit gönnen, und mit einiger Sorgfalt untersuchen, ob in dem Ganzen das sich findet, was man inneren Zusammenhang und wissenschaftliche Einheit zu nennen pflegt, oder ob diese Darstellung wenigstens dem Ideal, welches der Leser davon hat, näher kommt, als jede andere Ansicht, die man bis jetzt von der mathematischen Analysis, als Wissenschaft, aufgestellt hat.

In gegenwärtiger erster Abhandlung hat der Verfasser die Grundlage aller Rechnung festgestellt. — Als Inhalt der mathematischen Analysis mußte er bezeichnen: „die Kenntniß der Gegensätze und der Beziehungen, in denen die „sieben Operationen (also die Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten, Potenzen, Wurzeln und Logarithmen „in ihrer allgemeinsten Bedeutung) zu einander stehen.“ — Diese Gegensätze und Beziehungen werden ausgesprochen in allgemeinen Gleichungen zwischen allgemeinen Ausdrücken, in denen die Operations-Zeichen das Wesen ausmachen, die Buchstaben dagegen nur die Träger sind, an welchen diese Operations-Zeichen haften, so daß diese

Buchstaben weder Größen, noch Zahlen vorstellen, sondern ganz inhaltlos gedacht sind. — Diese allgemeinen Ausdrücke können auch unendliche Reihen seyn, wenn sie nur nach ganzen Potenzen eines solchen Trägers fortlaufen, d. h. die Form der ganzen Funktionen haben.

Von diesen allgemeinen Gleichungen, um welche sich die gesammte mathematische Analysis herumdreht und welche man auch Form-Gleichungen nennen könnte, unterscheiden sich nun diejenigen, in denen die Buchstaben bereits einen Inhalt erhalten haben, d. h. entweder so genannte unbenannte ganze Zahlen, oder zwar solche allgemeine Ausdrücke vorstellen, die aber ursprünglich ganzen Zahlen ihr Entstehen verdanken. Diese, ursprünglich ganzen Zahlen ihr Entstehen verdankenden Ausdrücke, lassen sich alle entweder auf eine der 5 Formen $\pm\mu$, $\pm\frac{\mu}{\nu}$ und 0 bringen, und werden dann reelle Zahlen genannt, oder sie lassen sich doch allemal auf die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ bringen, wo p und q solche relle Zahlen sind, und man nennt sie dann imaginäre Zahlen oder imaginäre Ausdrücke. Nennen wir eine solche Gleichung, in welcher die einzelnen Buchstaben nicht mehr bloße Träger der Operationen sind, sondern bereits einen eben angedeuteten Inhalt haben, d. h. reelle oder imaginäre Zahlen vorstellen, — nicht mehr eine „allgemeine,“ sondern eine Zahlen-Gleichung, so folgt aus dem von dem Verfasser aufgestellten Begriff der allgemeinen Gleichung, daß die Ausdrücke auf jeder

Seite des Gleichheits-Zeichens (einer solchen Zahlen-Gleichung) entweder *eine und dieselbe* reelle Zahl α, oder *eine und dieselbe* imaginäre Zahl $p+q\cdot\sqrt{-1}$ vorstellen, während der Begriff der *allgemeinen* Gleichung von dem gewöhnlichen verschieden seyn muß, um daraus ableiten zu können, daß die relle Zahl α, oder die imaginäre Zahl $p+q\cdot\sqrt{-1}$ durch einen dieser Ausdrücke (links oder rechts vom Gleichheits-Zeichen) wirklich vorgestellt ist. — Kommen in einer solchen *Zahlen-Gleichung* unendliche Reihen vor, so müssen sie convergent gedacht werden, während in einer *allgemeinen* Gleichung unendliche Reihen vorkommen werden, bei denen weder von Convergenz noch von Divergenz derselben die Rede seyn kann, eben weil in der *allgemeinen* Gleichung jeder Buchstabe nur ein Träger der Operationen und noch völlig inhaltlos ist.

Es mag dies hier noch durch ein Beispiel erläutert werden. Im §. 68. dieses Heftes haben wir erwiesen, daß der binomische Lehrsatz ganz allgemein gilt, d. h. daß die Gleichung

1) $(1+z)^n = 1 + n\cdot z + \frac{n^{2|-1}}{2!}z^2 + \frac{n^{3|-1}}{3!}z^3 + \frac{n^{4|-1}}{4!}z^4 + \text{in inf.}$ *)

für jedes n und für jedes z ganz allgemein statt findet, so daß n und z als ganz inhaltlos angesehen werden können und dann weder eine Größe noch eine Zahl vorstellen, wenn

*) Das Zeichen $n^{4|-1}$ bedeutet das Produkt von 4 Faktoren, wo der erste n ist und jeder folgende aus dem vorhergehenden durch Addition von -1 entsteht, d. h. das Produkt $n(n-1)(n-2)(n-3)$. Eben so bezeichnet das Zeichen $4!$ das Produkt $1\cdot2\cdot3\cdot4$.

man nur links unter $(1+z)^n$, so oft n nicht positiv ganz ist, einen einzigen der durch diese Potenz vorgestellten Ausdrücke versteht und zwar den rechten. Setzt man in dieser Gleichung $\frac{z}{n}$ statt z, so erhält man

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1+z+\frac{z^2}{2!}\cdot\frac{n^{2|-1}}{n^2}+\frac{z^3}{3!}\cdot\frac{n^{3|-1}}{\S!}+\text{in inf.},$$

so daß das r^{te} Glied (nach dem allerersten) $=\frac{z^r}{r!}\cdot\frac{n^{r|-1}}{n^r}$ ist. Nun ist aber $\frac{z^r}{r!}$ das (nach dem allerersten folgende) r^{te} Glied der Reihe für e^z, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen vorstellt; also würde diese Entwickelung von $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ in die Reihe für e^z übergehen, wenn man n so nehmen könnte, daß $\frac{n^{r|-1}}{n^r}$,

d. h. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-(r-1))}{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdots n}$,

d. h. $1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)$ für jede positive ganze Zahl r, der Einheit gleich würde. Gewöhnlich sagt man nun, daß dies für $n=\pm\infty$ eintrete, und setzt daher

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z \quad \text{für } n=\pm\infty,$$

ohne vielleicht immer daran zu denken, daß dies zwar in Bezug auf die Glieder der Fall seyn werde, für welche r selbst noch nicht unendlich groß ist, daß aber, wenn man so sagen darf, im Unendlichen, der Faktor $\frac{n^{r|-1}}{n^r}$ immer unbestimmt, wenn auch immer zwischen bestimmten Grenzen

eingeschlossen seyn wird. Der obige Schluß ist also nicht ganz richtig und die Gleichung

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z \quad \text{für } n = \pm\infty$$

kann nicht als eine allgemeine (Form-)Gleichung zugelassen werden. — Denkt man sich aber z nicht mehr inhaltlos, sondern entweder reell oder imaginär, also von der Form $\varrho \cdot Cos\,\varphi + \sqrt{-1}\cdot\varrho\cdot Sin\,\varphi$, so ist $z^r = \varrho^r \cdot Cos\, r\varphi + \sqrt{-1}\cdot\varrho^r\cdot Sin\, r\varphi$; und dann ist $\frac{z^r}{r!}$ (sowohl in der Reihe, die man für $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ für $n=\pm\infty$ erhalten hat, als auch in der Reihe für e^z) der Null desto näher, je größer r genommen wird, d. h. je weiter die Glieder nach dem Unendlichen hin genommen werden. In dem Augenblick also, wo die Behauptung, daß $\frac{n^{r|-1}}{n^r}=1$ ist (für $n=\pm\infty$) aufhört richtig zu seyn, können die Glieder, auf welche diese falsche Behauptung einfließt, als der Null gleich angesehen werden, und so heben sich dann diese Dissonanzen wieder auf. — Wenn daher die Gleichung

$$2) \qquad \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z \quad \text{für } n = \pm\infty$$

auch nicht als eine allgemeine (Form-)Gleichung richtig ist, so ist sie doch richtig für jeden reellen oder imaginären Werth von z als eine Zahlen-Gleichung, und zwar deshalb, weil beide Reihen, sowohl die für $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, als auch die für e^z, für jeden solchen Werth von z convergent

sind.*) — Hätten endlich die Glieder dieser Reihen nicht diese großen Nenner $r!$ (d. h. $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdots r$), welche Ursache sind, daß die Reihen für jeden Werth von z convergent sind, so würde die erwähnte Gleichung auch nur für diejenigen Werthe von z gelten, für welche die beiden gedachten Reihen convergent werden würden.

Während also die Gleichung Nr. 1. allgemein gilt, wenn auch z ganz inhaltlos als ein bloßer Träger der Operationen gedacht wird, und wobei von der Convergenz oder Divergenz der Reihe gar nicht die Rede seyn kann, erblicken wir in der Nr. 2. eine Gleichung, die nur als Zahlen-Gleichung richtig ist, d. h. die nur dann richtig ist, wenn die Reihen convergent sind.

Ein bestimmtes Integral setzt immer Zahlen-Werthe voraus; daher werden Gleichungen, in denen bestimmte Integrale vorkommen, selten oder nie als allgemeine (Form-) Gleichungen wahr seyn, sondern immer nur als Zahlen-Gleichungen zugelassen werden können; deshalb ist auch dort die Convergenz der daselbst etwa vorkommenden unendlichen Reihen eine unerläßliche Bedingung, während die Bedingung der Convergenz bei einer allgemeinen Reihe, in allgemeinen Untersuchungen, wie solche der Möglichkeit aller

---

*) Will man daher den Werth von e^z berechnen näherungsweise, für irgend einen positiven oder negativen Werth von z, so darf man nur den Werth von $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ für irgend ein an sich recht großes positives oder negatives, ganzes oder gebrochenes, rationales oder irrationales n berechnen, und man wird die Annäherung desto weiter treiben, je größer n genommen wird. Namentlich kann man auf diesem Wege die Zahl e selbst näherungsweise berechnen.

Rechnung als Grundlage voraus gehen müssen, eben so ohne Sinn bleibt, wie wenn man bei der Untersuchung der Frage, was ein lebendiger und noch kräftiger tüchtiger Mensch werde leisten können, die Bedingung als eine unerläßliche voranschicken wollte, — daß derselbe bereits todt sey.

Wenn aber Gleichungen vorkommen können, welche nicht mehr als allgemeine, sondern nur unter der speciellen Voraussetzung gelten, daß sie Zahlen-Gleichungen sind, so muß in einer zweiten Abhandlung die Theorie solcher Zahlen-Gleichungen noch besonders festgestellt werden, und namentlich hat die „Theorie der bestimmten Integrale" (wo die Zahlen-Gleichungen zum ersten Male in Massen auftreten) die Aufgabe, wie mit solchen gerechnet werden darf, bestimmt und entschieden festzustellen. — So glaubt der Vfr., was der geneigte Leser von dieser zweiten Abhandlung zu erwarten haben dürfte, möglichst anschaulich dargestellt zu haben. Während nämlich diese erstere von den ganz allgemeinen Formen, als der ersten und nothwendigsten Grundlage aller Rechnung handelt, wird die zweite Abhandlung die allgemeinen Untersuchungen fortzusetzen, dabei aber sich mehr mit den Uebergängen der allgemeinen Formen in speciellere und numerische zu beschäftigen haben, welche Uebergänge statt finden, sobald die ersteren unter bestimmten und speciellen Voraussetzungen betrachtet werden.

Unter den materiellen Ergebnissen, welche die hier aufgestellte Ansicht zur Folge gehabt hat, und welche zunächst in der gegenwärtigen ersten Abhandlung zu finden

sind, glaubt der Vfr. folgende noch namentlich hervorheben zu müssen:

a) ein völlig gesichertes Rechnen mit Wurzeln im Allgemeinen und mit imaginären Ausdrücken im Besonderen;

b) die Aufstellung derjenigen Formeln, welche an die Stelle der gewöhnlichen Regeln

$a^x \cdot a^z = a^{x+z}$; $a^x : a^z = a^{x-z}$; $(a^x)^z = a^{xz}$; u. s. w.

treten müssen, um mit allgemeinen Potenzen und Logarithmen ganz sicher rechnen zu können, in sofern die vorstehenden und gewöhnlich angewandten Formeln nur einseitige Gültigkeit haben;

c) ein völlig gesichertes Rechnen mit solchen unendlichen Reihen, welche noch ganz allgemein, und eben deshalb nicht convergent sind.

In den „Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik" Berlin 1823 finden sich auch einige Anwendungen dieser elementaren, aber gesicherten Rechnungsweisen, besonders in dem letztern dieser Aufsätze, auf welche der Vfr. den Leser deshalb ausdrücklich hinweist, weil der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung die größeste Kürze vorschreibt, hier also dergleichen Anwendungen nicht gegeben werden durften.

Derjenige Leser endlich, welcher diese Ansichten ausführlicher entwickelt zu sehen wünscht, aber freilich auch zugleich so, wie pädagogische Zwecke es vorgeschrieben haben, wird Befriedigung finden in dem

„Versuch eines vollkommen consequenten Systems „der Mathematik", 7 Theile;

und zwar in den beiden ersten Theilen (2te Auflage); ferner unvollkommener in dem 1sten Theil (2te Auflage) des

„Lehrbuchs der Elementar-Mathematik" 3 Theile (welches mehr für Anfänger geschrieben ist);

am unvollständigsten in dem

„Lehrbuch für den gesammten mathematischen Elementar-Unterricht" 3te Auflage. Leipzig, 1842;

(welches für die allerersten Anfänger als Leitfaden bestimmt ist); dagegen wieder gründlicher in dem

„Kurzen Lehrbuch der gesammten höhern Mathematik in zwei Bänden." Leipzig, 1839.

Sollten aber in der gegenwärtigen Schrift noch kleine und unbedeutendere Redaktionsfehler sich vorfinden, so möge der geneigte Leser solches dem oft allzuviel beschäftigten Vfr. freundlichst zu Gute halten.

Berlin im Januar 1842.

M. Ohm.

Berichtigung.

Im ersten Bogen, welcher nur zwei Korrekturen unterworfen worden ist, sind folgende Fehler stehen geblieben. Man lese:

S. 1 Z. 4 v. o. „Arithmetik" statt „Arithmetis";
S. 2 Z. 2 v. u., S. 4 Z. 5 v. u., S. 5 Z. 1 v. o., S. 8 Z. 6 v. o. „leçon" und „leçons" statt „léçon" „léçons";
S. 6 Z. 10 v. u. „Faktorielle" statt „Faktiorelle"; endlich
S. 6 Z. 1 v. o. „Divisor" statt „Devisor".

Inhalt.

Einleitung . . . . Pag. 1—27.

Erste Abtheilung.

Das Verhalten der vier erstern Operationen zu einander . Pag. 29—74.

Erstes Kapitel.

§. 1. Addiren und Subtrahiren der ganzen Zahlen.
§. 2. Drei einfachste „Gleichungen für ganze Zahlen".
§. 3. Allgemeine „Summe"; allgemeine „Differenz"; allgemeine „Gleichung".
§. 4. Sätze von den allgemeinen Gleichungen.
§. 5. Die Gesetze der Addition und Subtraktion.
§. 6. Allgemeiner Begriff des „Rechnens".
§. 7. Allgemeiner Begriff der „Null".
§. 8. Allgemeiner Begriff von +b und —b.
§. 9. Allgemeiner Begriff der algebraischen Summe.
§. 10. Begriff der positiven und negativen ganzen Zahl.

Zweites Kapitel.

§. 11. Allgemeine Begriffe des Multiplicirens und Dividirens.
§. 12. Begriff des ganzen Produkts.
§. 13. Begriff des Differenz-Produkts.
§. 14. Begriff des allgemeinen Produkts.
§. 15. Begriff des Differenz-Quotienten.
§. 16. Man darf nie durch Null dividiren.
§. 17. Gesetze dieser Quotienten.
§. 18. Begriff des allgemeinen Quotienten.
§. 19. Woran die Gleichheit der Ausdrücke erkannt wird.

§. 20. Wie Gleichungen aus einander gebildet werden.
§. 21. Multiplikation und Division mit Null und mit —b und +b; mit algebraischen Summen.
§. 22. Begriff der gebrochenen Zahl; der positiv und negativ gebrochenen; der reellen Zahl.
§. 23. Begriff der größern und kleinern reellen Zahl, so wie des stetigen Wachsens (und Abnehmens) aller reellen Zahlen von $-\infty$ bis zu $+\infty$.

Drittes Kapitel.

§. 24. Begriff der ganzen Potenz, nebst 5 Formeln; Begriff der Differenz-Potenz.
§. 25. Begriff des Potenzirens.
§. 26. Begriff der positiven oder absoluten Wurzel.
§. 27. Fünf Formeln für diese positiven Wurzeln.
§. 28. Begriff der reellen Potenz.
§. 29. Begriff des reellen Logarithmen.
§. 30. Fünf Formeln für diese reellen Logarithmen.
§. 31. Begriff der numerischen Zahl. Das gemeine Zifferrechnen, als erste Anwendung der vorhergehenden Lehren.
§. 32. Begriff des Decimalbruchs; das Rechnen mit selbigem.
§. 33. Weitere Erledigung des Ziffernrechnens.
§. 34. Begriff und Erledigung des Buchstabenrechnens.

Viertes Kapitel.

§. 35. Begriff der Bestimmungs-Gleichung, im Gegensatz zur identischen,
§. 36. Auflösung der algebraischen Gleichungen vom ersten Grade, mit einem und mit mehreren Unbekannten.
§. 37. Begriff der allgemeinen Quadrat-Wurzel; imaginäre Wurzel; Vorsichtsregeln für das Rechnen mit allgemeinen (also auch mit imaginären) Quadrat-Wurzeln.
§. 38. Auflösung der allgemeinen quadratischen Gleichung.
§. 39. Begriff der allgemein-numerischen Zahl; das Rechnen mit selbiger.
§. 40. Die höhere algebraische Gleichung vom n^{ten} Grade.
§. 41. Begriff der allgemeinen n^{ten} Wurzel. — Formeln für solche.
§. 42. Der binomische Lehrsatz für ganze Exponenten. Umformung der Binomial-Reihe für $(1+b)^x$ in eine Reihe die nach ganzen Potenzen von x fortläuft.

Zweite Abtheilung.

Das Verhalten der drei letztern Operationen zu einander und zu den vier erstern . . . . , Pag. 75 – 154

Fünftes Kapitel.

§. 43. Begriff der nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden unendlichen Reihe.
§. 44. Die Identität der Koefficienten, wenn die Reihen identisch sind.
§. 45. Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren zweier unendlichen Reihen.
§. 46. Das Potenziren und Radiciren der unendlichen Reihen.
§. 47. Begriff der Summation der unendlichen Reihen.
§. 48. Convergenz und Divergenz der numerischen Reihen. Begriff des Werthes einer convergenten Reihe.
§. 48b. Praktische Regeln für das Rechnen mit unendlichen Reihen.

Sechstes Kapitel.

§. 49. Begriff der natürlichen Potenz e^x, wo x beliebig reell oder imaginär ist. Drei Formeln für solche.
§. 50. Begriff des natürlichen Logarithmen, und des allgemeinen Kosinus und Sinus.
§. 51. Formeln für diese allgemeinen Kosinus und Sinus.
§. 52. Untersuchung des Ganges der reellen Werthe dieser allgemeinen Kosinus und Sinus.
§. 53. Andeutungen über die periodische Wiederkehr dieser Werthe.
§. 54. Entschiedene Nachweisung der letztern.
§. 55. Berechnung der Sinus und Kosinus sowohl reeller als auch imaginärer Argumente (Bogen).
§. 56. Alle Werthe von x, welche $K_x = \mu$ und $S_x = \nu$ machen, zu finden.
§. 56b. Allgemeinster Begriff des Ziffern-Rechnens.
§. 57. Berechnung aller Werthe einer ν^{ten} Wurzel.
§. 57b. Einfachster Werth derselben.
§. 58. Berechnung aller Werthe des natürlichen Logarithmen.
§. 58b. Bezeichnung des einfachsten Werthes desselben.
§. 59. Formeln für die einfachsten Werthe der natürlichen Logarithmen.
§. 60. Formeln für die unendlich vieldeutigen natürlichen Logarithmen.

§. 61. Definition der allgemeinen Potenz und ihres einfachsten Werthes.
§. 62. Eigenschaften der (eindeutigen) einfachsten Werthe der allgemeinen Potenzen.
§. 63. Allgemeine Logarithmen; Formeln für selbige.
§. 63b. Einfachste Werthe der allgemeinen Logarithmen; Formeln für diese einfachsten Werthe.
§. 64. Eigenschaften der unendlich vieldeutigen allgemeinen Potenzen.
§. 65. Bemerkungen hinsichtlich der Potenz-Formeln mit gebrochenen Exponenten.
§. 66. Allgemeinste Logarithmen.
§. 67. Die unendlichen Reihen für die Logarithmen.
§. 68. Der ganz allgemeine binomische Lehrsatz.
§. 69. Berechnung der Zahl π.
§. 70. Formeln für das allgemeine Rechnen mit allgemeinen (reellen oder imaginären) Argumenten (Bogen).
§. 71. Schlußbemerkungen.
Anhang. Von den Größen. §. 72—§. 74.

Einleitung.

Auf eine merkwürdige Weise sieht man die Klagen über den Mangel an Klarheit und Strenge in dem rechnenden Theil der Mathematik, — mag solcher Arithmetik, allgemeine Arithmetik, mathematische Analysis, oder sonst wie genannt werden, — von Zeit zu Zeit wiederkehren, bald ausgesprochen von untergeordneten Schriftstellern, bald von den ausgezeichnetsten Gelehrten wiederholt. Dem Einen bietet die Theorie der „entgegengesetzten Größen" Widersprüche dar; — bei dem Andern sind es bloß die „imaginären Größen", welche ihn beunruhigen; — ein Dritter endlich findet Schwierigkeiten bei den „unendlichen Reihen", entweder weil Euler und andere ausgezeichnete Mathematiker solche in einer divergenten Form mit Erfolg angewandt haben, während er selber überzeugt zu seyn glaubt, daß Konvergenz derselben ihre Grundbedingung ist, — oder weil bei ganz allgemeinen Untersuchungen allgemeine Reihen vorkommen, die, eben weil sie allgemein sind, weder zu den divergenten noch zu den konvergenten gerechnet werden können.

Diese Betrachtungen drängen sich dem Vfr. dieser Bogen immer wiederholt auf, und drängten sich ihm namentlich wieder bei dem Lesen eines Briefes des für die Mathematik leider viel zu früh verstorbenen Abel auf, der sich in den Oeuvres complètes de N. H. Abel, Christiania 1839, abgedruckt findet und in welchem Abel schreibt:

„Les séries divergentes sont en général quelque chose „de bien fatal, et c'est une honte qu'on se soit avisé d'y

„fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout „ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont „fait tant de malheur et qui ont enfanté tant de paradoxes. „Peut on imaginer rien de plus horrible que de débiter

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - \text{ etc. etc.},$$

„où n est un nombre entier positif? — Enfin mes yeux „se sont dessillés d'une manière frappante, car à l'exception „des cas les plus simples, par exemple les séries géomé- „triques il ne se trouve dans les mathématiques presque „aucune série infinie, dont la somme est déterminée d'une „manière rigoureuse, c'est à dire, la partie la plus essen- „tielle des mathématiques est sans fondement. Pour la plus „grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais „c'est la une chose bien étrange. Je m'occupe à en cher- „cher la raison, problème très intéressant. Je ne crois que „tu pourras me proposer qu'un très petit nombre de pro- „blèmes ou de théorèmes contenant des séries infinies, à la „démonstration des quels, je ne pourrai faire des objections „bien fondées. Fais cela et je te répondrai. Pas même „la formule binôme n'est encore rigoureusement démontrée. „J'ai trouvé qu'on a

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \cdots$$

„pour toutes valeurs de m, lorsque x est moindre que l'u- „nité. Lorsque x est égal à +1, la même formule a lieu, „mais seulement si m est plus grand que —1, et lorsque „x est égal à —1, la formule n'a lieu, que pour des va- „leurs positives de m. Pour toutes les autres valeurs de x „et de m, la série $1+mx+\cdots$ est divergente. — Le théo- „rème de Taylor, base de tout le calcul infinitésimal „n'est pas mieux fondé. Je n'en ai trouvé qu'une seule „démonstration rigoureuse, et celle ci est de Mr. Cauchy „dans son Résumé des léçons sur le calcul infini- „tésimal, ou il a démontré qu'on aura

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha\cdot\varphi' x + \frac{\alpha^2}{2}\cdot\varphi'' x + \cdots$$

„tant que la série est convergente; mais on l'emploie à l'or-„dinaire sans façon dans tous les cas.

„La théorie des séries infinies en général est jusqu'à „présent très mal fondée. On applique aux séries infinies „toutes les opérations, comme si elles étaient finies; mais „cela est il bien permis? je crois que non. Où est il dé-„montré, qu'on obtient la différentielle d'une série infinie, „en prenant la différentielle de chaque terme? Rien n'est „plus facile que de donner des exemples où cela n'est pas „juste; par exemple

$$\frac{x}{2} = Sin\, x - \frac{1}{2} Sin\, 2x + \frac{1}{3} Sin\, 3x - \text{ etc.};$$

„en différentiant on obtient

$$\frac{1}{2} = Cos\, x - Cos\, 2x + Cos\, 3x - \text{ etc.}$$

„résultat tout faux, car cette série est divergente.

„La même chose a lieu par rapport à la multiplication „et à la division des séries infinies. J'ai commencé à exa-„miner les règles les plus importantes qui (à présent) sont „ordinairement approuvées à cet égard, et à montrer en „quel cas elles sont justes ou non. Cela va assez bien et „m'intéresse infiniment."

So klagt Abel. — Aber d'Alembert (an mehreren Stellen seiner „Opuscules"), Carnot, selbst Laplace und so viele Andere führen ähnliche Klagen wenn auch kürzere und nicht gerade über die unendlichen Reihen. — Kramp in seiner „Analyse des réfractions astronomiques et terrestres 1799 Chap. III. Analyse des facultés numériques" stößt auf eine Formel, von welcher er selbst sagt, daß sie falsch sey, und fügt hinzu: J'avoue franchement que toutes les peines, que je „me suis données pour trouver la raison de ce paralo-„gisme ont été inutiles jusqu'ici; j'aurai infiniment d'obli-„gation au géomètre, qui voudra bien me l'indiquer. Il me

„semble qu'elle tient essentiellement à notre théorie des „puissances fractionnaires et des Logarithmes des nombres „négatifs, et que le théoreme $log(-a) = log\,a + log(-1)$, „malgré son extrême apparence de simplicité, est encore „bien loin d'être rigoureusement démontré." —

An einer andern Stelle desselben Kapitels, wo er auf ähnliche Widersprüche stößt, heißt es wieder: „Je ne serais pas „éloigné de croire en effet, que toute l'application, que „nous avons fait jusqu'ici de notre théorie générale des „puissances aux racines et aux logarithmes des quantités „negatives, ne soit une conclusion *a particulari ad universale* qui ne devrait être guères excusable en fait d'analyse."

Weiter heißt es: „Quant à la differentielle de $(-1)^x$ „il n'est pas un seule Géomètre, qui en se conformant aux „idées reçues, soit en état de nous dire ce que c'est.

„Mais que ferons nous de $(-1)^{\sqrt{2}}$? que deviendra „$(-1)^x$ dans l'infinité de cas, qui nous donnent pour ex„posants, des quantités irrationelles, exponentielles, circu„laires, enfin transscendantes quelconques?"

So weit Kramp. — Man sieht, derselbe klagt weniger über die unendlichen Reihen, mehr aber über die Potenzen und Logarithmen, und hat, in der Meinung richtig zu verfahren, eine größere Anzahl falscher Resultate herausgebracht, glücklicher Weise jedoch die Unrichtigkeit derselben auch bemerkt. — Die größten Analysten, wie z. B. Euler, Lagrange, haben dagegen in ihren Schriften zuweilen solche Resultate aufgestellt, ohne immer die Unrichtigkeit derselben selbst wahrzunehmen. Namentlich sind z. B. alle Resultate falsch, welche man in der XIme Leçon der Leçons sur le calcul des fonctions des Lagrange (1806) vorfindet, welche Resultate jedoch Euler größtentheils zuerst so gegeben hat; — ihre Unrichtigkeit für einen allgemeinen und nicht bloß ganzen Exponenten überrascht bei Lagrange nur deshalb mehr, weil der Zweck der

gedachten Leçon gerade kein anderer ist, als die allgemeine Richtigkeit dieser Formeln recht gründlich zu erweisen.

Wenn aber auf der einen Seite solche Thatsachen laut genug sprechen und auf der andern Seite auch solche Männer klagen, welche auf der höchsten Höhe der Wissenschaft stehen, und welche ihre Grenzen selbst um mehr oder weniger hinausgerückt haben, so muß man sich wiederholt fragen:

1) Sind diese Klagen gerecht oder ungerecht, und in wie weit? —

2) Sind, wie Abel zu glauben scheint, die unendlichen Reihen allein die Ursache aller der Paradoxien des Kalkuls, oder sind die Quellen derselben auch noch anderswo zu suchen und wo? —

3) Wenn man in der mathematischen Analysis sagt: „dieses oder jenes Resultat sey richtig oder sey falsch", was versteht man darunter? — oder mit andern Worten: wenn zwei Resultate sich widersprechen, welche Merkmale hat man, um das richtige von dem falschen unterscheiden zu können? —

4) Wie lassen sich die Paradoxien des Kalkuls mit Sicherheit vermeiden? —

U. dgl. m.

Sieht der Vfr. dieser Bogen diese Fragen aus seinem Standpunkte an, so erscheint ihm, um die erste Frage zuerst zu erörtern, der Vorwurf Abels, daß man mit divergenten Reihen rechne oder erweise, in seiner großen Allgemeinheit nur die Mathematiker des verflossenen Jahrhunderts zu treffen, denn alle jetzt lebenden mathematischen Notabilitäten, wie Gauß, Dirichlet, Jacobi, Bessel, Cauchy u. s. w. thun es nicht; mehrere, darunter Poisson haben sich entschieden dagegen ausgesprochen. — Ob aber die Reihen, mit denen man umgeht, und aus denen man Folgerungen zieht, allemal und nothwendig konvergent seyn müssen, davon hat sich der Vfr. dieses Aufsatzes gar noch nicht überzeugen können; ja er ist im Gegentheil der Meinung, daß die Reihen, so lange sie allgemein sind, so daß weder von ihrer Konvergenz noch von

ihrer Divergenz die Rede seyn kann, gehörig gehandhabt, nothwendig und unbedingt allemal richtige Resultate liefern müssen. Dies näher zu erörtern ist eine der Aufgaben, welche sich gegenwärtige Bogen gesetzt haben.

Was die zweite Frage betrifft, nämlich wo sind die Quellen der Paradoxien des Kalkuls zu suchen? so findet sie der Vfr. vorzugsweise a) in einem einseitigen Auffassen des Begriffs der Null; b) in der Nichtachtung der Eigenschaften mehrdeutiger oder unendlich vieldeutiger Ausdrücke; c) darin, daß es in der mathematischen Analysis, namentlich auch in der Algebra, bei mangelnder Aufmerksamkeit so leicht geschieht, daß allgemeine Urtheile allgemein umgekehrt werden, was bekanntlich gegen die ersten Regeln der Logik verstößt, und zu den irrigsten Resultaten führen muß; d) in einer nicht immer ganz richtigen Behandlung der unendlichen Reihen; endlich auch e) darin, daß man Resultate als allgemein gültig ansieht und anwendet, die nur für specielle Fälle erwiesen, und auch nur in denselben speciellen Fällen wahr sind. Dies letztere ist namentlich in dem oben angeführten Werke von Kramp der Fall, welcher für alle Fakultäten (Faktoriellen) das Gesetz

$$h^{m} \cdot a^{m|\nu} = (ha)^{m|h\nu}$$

angewandt hat, auch für diejenigen, in denen der Exponent m eine gebrochene Zahl ist, während unter den Formeln, nach denen man mit Fakultäten (Faktoriellen) rechnet, gerade diese für die gebrochenen Faktiorellen nicht gilt, wie man leicht nachweisen kann. Es ist dies derselbe Fehler, den man begehen würde, wenn man die Gleichung

$$(-1)^{n} = Cos\, n\pi,$$

welche für jede ganze Zahl n wahr ist, auch für ein gebrochenes n gelten lassen wollte. Für $n = \frac{1}{2}$ würde sie z. B. liefern

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = Cos\, \tfrac{1}{2}\pi, \text{ d. h. } \sqrt{-1} = 0.$$

Obgleich aber selbst vor nicht zu langer Zeit Tralles in zweien Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin (aus den Jahren 1815 und 1821) diese Folgerung wirklich gezogen

und in beiden Abhandlungen im Ernste behauptet hat, daß $\sqrt{-1} = 0$ sey; so sind doch solche Verirrungen bei dem besseren Geiste, in welchem zur Zeit die mathematische Analysis getrieben wird,*) nicht so leicht mehr zu befürchten; daher mag von dieser, oben unter e. aufgeführten Ursache der Paradoxien des Kalkuls hier nicht weiter mehr die Rede seyn.

Wir sagten dagegen: a) die Null würde häufig zu einseitig aufgefaßt. Betrachtet man nämlich die Null als den Uebergang vom Positiven zum Negativen, so kann man zur Noth sagen: „$\frac{1}{0}$ sey das Unendliche", weil man es dann in dem Sinne nehmen kann, daß $\frac{1}{a}$ dem Unendlichen desto näher rückt, je näher a der Null genommen wird. Doch tritt dann der Fall ein, daß man nicht recht weiß, ob $\frac{1}{0}$ das positiv oder das negativ Unendliche ist, weil $\frac{1}{0}$ auch die Grenze des Werthes von $\frac{1}{-a}$ ist, für den Fall, daß a der Null immer näher rückend gedacht wird. — Weil aber die Null viel allgemeiner die Differenz $a-b$ in dem Falle vorstellt, wo a und b eben sowohl reel als auch imaginär seyn können, wenn sie nur einander gleich werden, — so ist die Null häufig auch der Uebergang vom Reellen zum Imaginären, oder selbst vom Imaginären zum Imaginären, so daß dann $\frac{1}{0}$ auf einmal als ein unendlicher Zwischen-Werth zwischen lauter imaginären Werthen erscheinen würde, wenn man die früher gebräuchlichen Ansichten festhalten wollte. — Eine genauere Kenntniß der Null führt aber, wie wir weiter unten zeigen werden, dahin einzusehen, daß man $\frac{1}{0}$ im Kalkul gar nicht vor-

*) Auf solche Fehler wie sie z. B. Oettinger zu Freiburg (Heidelberg) in seinen Schriften hie und da gemacht hat, können wir uns hier natürlich gar nicht einlassen, da solche ganz subjektiv sind, und nicht leicht von einem zweiten Analysten noch einmal werden gemacht werden.

kommen lassen darf, und daß das Vorkommen dieser ungeeigneten Form auch durchaus nicht motivirt ist.

Wir sagten ferner: b) die Nichtachtung der Eigenthümlichkeit mehrdeutiger Ausdrücke führe zu Paradoxien des Kalkuls, und wir fügen hier hinzu, daß dieser Grund es ist, welcher in der oben angeführten Leçon XIme der Leçons sur le calcul des fonctions des Lagrange vorwaltet. Ist nämlich A ein mehrdeutiger Ausdruck, der einen seiner verschiedenen Werthe repräsentirt, der aber in derselben Rechnung, wenn er mehreremale erscheint, jedesmal einen andern seiner Werthe repräsentiren kann, so darf man

nicht $(p+q)A$ statt $pA+qA$ und
nicht A^2 statt $A \cdot A$ setzen, und

nicht aus $B=A$ und $C=A$ folgern, daß auch $B=C$ sey, weil diese Folgerungen nur dann richtig seyn müssen, wenn man sich vorher überzeugt hat, daß A jedesmal einen und denselben seiner Werthe vorstellt.

Setzte man z. B. statt $2\sqrt{9}+5\sqrt{9}$ jetzt $7\sqrt{9}$, während der Faktor $\sqrt{9}$ in $2\sqrt{9}$ den Werth $+3$, in $5\sqrt{9}$ aber den Werth -3 vorstellt, so hätten wir statt $2\cdot3+5(-3)$ gesetzt $\pm7\cdot3$, welches jedenfalls falsch wäre. — Eben so ist zwar unbedingt $(\sqrt{4})^2=4$; dagegen $\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}$ ist nicht nothwendig $=4$; weil in dem Produkt $\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}$ die Faktoren vielleicht nicht einander gleich sind, sondern der eine $+2$, der andere -2 seyn kann, so daß man dann -4 als den richtigen Werth des Produkts $\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}$ nehmen müßte.

In den oben angeführten Untersuchungen des Euler und Lagrange ist so geschlossen, nämlich:

$$(Cos\,x+\sqrt{-1}\cdot Sin\,x)^m = Cos\,mx+\sqrt{-1}\cdot Sin\,mx;$$

$$(Cos\,x-\sqrt{-1}\cdot Sin\,x)^m = Cos\,mx-\sqrt{-1}\cdot Sin\,mx;$$

also

$$Cos\,mx = \frac{(Cos\,x+\sqrt{-1}\cdot Sin\,x)^m + (Cos\,x-\sqrt{-1}\cdot Sin\,x)^m}{2}$$

$$Sin\,mx = \frac{(Cos\,x+\sqrt{-1}\cdot Sin\,x)^m - (Cos\,x-\sqrt{-1}\cdot Sin\,x)^m}{2\sqrt{-1}}.$$

So lange nun m eine positive ganze Zahl ist, so lange sind die

folgenden Schlüsse keiner Schwierigkeit unterworfen; — so wie man aber statt m eine gebrochene Zahl setzt, z. B. $\frac{1}{3}$, so stellen die Potenzen auf der rechten Seite der vorstehenden Formeln einen ihrer mehreren (drei) Werthe vor, und wenn man nun versäumt, wie es Euler und Lagrange gethan haben, die zusammengehörigen Werthe dieser Potenzen herauszusuchen, so werden die vorstehenden Formeln, wie alle ähnlichen, allemal falsche Resultate liefern.

Diese zu beachtende Mehrdeutigkeit der Ausdrücke ist es ferner, welche verbietet im Allgemeinen $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = (\sqrt{-a})^2$, (also auch $= -a$) zu setzen, — welche ferner nicht erlaubt $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$ zu nehmen, obgleich sowohl das eine, wie das andere in vielen Fällen richtig seyn kann. Im Allgemeinen, und so lange man noch keine näheren Untersuchungen angestellt hat, muß man

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{+a^2} = \pm a$$

und $$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{+ab} = \pm\sqrt{ab}$$

nehmen, weil dann die Ausdrücke zur Rechten noch eben so vieldeutig sind als die zur Linken, so daß keiner der Werthe zur Linken (worunter der in dieser Anwendung vielleicht gerade taugliche) verloren geht. Aus diesem Grunde ist es bequem, so wie man einmal mit imaginären Ausdrücken rechnen muß, den einen der beiden Werthe von $\sqrt{-1}$ mit i, den andern dann mit $-$i zu bezeichnen, und die Rechnungen so einzurichten, daß i, so oft solches vorkommt, jedesmal eine und dieselbe der beiden Formen $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ vorstellt. Dann ist man jeder Schwierigkeit überhoben, und man setzt, so wie man es in der Elementar-Buchstabenrechnung gewohnt worden ist, ohne weiteres $i \cdot i = i^2 = -1$. — So lange man aber noch ganz allgemeine Ausdrücke hat, die eben so gut noch reell wie imaginär seyn können, so lange ist eine solche Einrichtung der Rechnung unmöglich.

Wir gaben ferner c) als Quelle der Paradoxien in der

mathematischen Analysis den Umstand an, daß man so häufig, ohne es zu bemerken, allgemeine Urtheile allgemein umkehrt. Diesen Fehler sieht man in der niedern Algebra am häufigsten gemacht, obgleich Fehler, dort begangen, deshalb weniger auffallend sind, weil die Untersuchungen dort meist noch zu den besonderen gehören, daher die Resultate, ehe sie gebraucht werden, sich gleichsam von selbst erst einer Prüfung unterziehen. — Ein Beispiel mag für alle dienen. So oft in der Algebra eine Größe gesucht wird, so kann man nicht anders als so schließen: „Wenn die gesuchte Größe existirt, also durch eine ganze oder „gebrochene unbekannte Zahl x ausgedrückt ist, so hat diese „Zahl x vermöge der Bedingungen der Aufgabe, einer Glei„chung, z. B. der Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}-1=x$$

„zu genügen." — Man darf aber nun nicht umgekehrt sagen: jeder Werth von x, welcher dieser Gleichung genügt, muß die Aufgabe lösen?? — Denn, erlaubte man sich diese Folgerung, so wäre dies eben so geschlossen, wie wenn man aus: „Alle „Menschen sind sterblich" folgern wollte, „also sind auch alle „Sterbliche Menschen"? — So oft daher eine algebraische Aufgabe in Gleichung gebracht (angesetzt) ist, so kann man nur so folgern: „Unter den Werthen von x, welche dieser Gleichung genügen, muß derjenige, welcher die gegebene Aufgabe löst, mit begriffen seyn, wenn ein solcher überhaupt existirt. Die Gleichung drückt ja immer nur eine einzige Eigenschaft der gesuchten Größe aus, während die Aufgabe gewöhnlich für die unbekannte Größe noch eine oder mehrere (Neben-)Bedingungen in sich schließt, die nicht in der Gleichung ausgesprochen, aber nichts desto weniger vorhanden sind, so daß der gesuchte Zahlen-Werth von x nicht bloß der Gleichung, sondern auch diesen übrigen Bedingungen zu genügen hat.

Stellt z. B. x den Radius eines Kreises vor, so ist eine stillschweigende Nebenbedingung, daß x eine positive ganze oder gebrochene Zahl seyn muß. Giebt also die Gleichung für x einen

einzigen Werth nur, und ist dieser imaginär, oder negativ, so ist in beiden Fällen, in dem letztern so gut wie in dem erstern, die Aufgabe selbst geradezu unmöglich, und die früher so gewöhnliche Ansicht, als dürfe man das negative Resultat nur im entgegengesetzten Sinne nehmen, um doch eine Auflösung der gegebenen Aufgabe zu haben, ist als eine der irrigsten und unbegründetsten zu bezeichnen.

Daß man endlich d) nicht mit divergenten unendlichen Reihen (z. B. nicht mit

$$1^n - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - \text{ꝛc. ꝛc.}$$

so lange n positiv ist) rechnen dürfe, versteht sich in gegenwärtiger Zeit so von selbst, daß wir hierüber nichts weiter sagen wollen. Allein wir werden im Verlaufe dieser Schrift zeigen, daß man mit allgemeinen Reihen, die eben so gut noch konvergent als divergent seyn können, und die daher noch keines von beiden sind, mit großer Sicherheit rechnen könne, dürfe und müsse.

Besonders wichtig erscheint uns die obige dritte Frage: woran erkennt man die Unrichtigkeit eines Resultats? — Alle Resultate der mathematischen Analysis sind nämlich Gleichungen; — ob nun solche richtig sind oder nicht, läßt sich nur dann beurtheilen, wenn man genau weiß, was eine „Gleichung" ist. Haben wir aber in unserer mathematischen Analysis einen entschiedenen Begriff der Gleichung? — Der alte: „Uebereinstimmung in der Quantität" ist viel zu speciell und paßt gewiß für die Gleichungen nicht mehr, in welchen auch imaginäre Ausdrücke vorkommen, und also noch weniger für allgemeine Gleichungen, bei denen man noch nicht weiß, ob die Ausdrücke links und rechts vom (=) Zeichen reell oder imaginär sind. Wollte man aber, wie dies einige Mathematiker der neuern Zeit zu meinen scheinen, eine Gleichung zwischen imaginären Ausdrücken, als ein Symbol ansehen, welches zwei solche Gleichungen zwischen reellen Ausdrücken vereinigt, so sind dadurch offenbar nur Gleichungen von der Form $p + q \cdot \sqrt{-1} = \alpha + \beta \cdot \sqrt{-1}$

erklärt, bei denen überdies noch die Bedingung gemacht ist, daß p, q, α und β nicht mehr allgemein sondern reell sind. Diese Gleichung zerfällt dann unter dieser Voraussetzung allerdings in zwei Gleichungen $p = \alpha$ und $q = \beta$. Erklärt sich aber nach dieser letztern Ansicht z. B. die Gleichung

$$\frac{23+2\sqrt{-1}}{4-5\sqrt{-1}} = 2+3\sqrt{-1}\ ?,$$

welche doch in der Analysis für richtig gehalten wird? — Müßte man nicht statt des Ausdrucks $\frac{23+2\sqrt{-1}}{4-5\sqrt{-1}}$ zur Linken, zuvor $2+3\sqrt{-1}$ setzen, um die Gleichung

$$2+3\sqrt{-1} = 2+3\sqrt{-1}$$

von der obigen Form zu erhalten, welche nun in die beiden Gleichungen

$$2 = 2 \quad \text{und} \quad 3 = 3$$

zerfällt? — Um aber $2+3\cdot\sqrt{-1}$ statt des Quotienten $\frac{23+2\sqrt{-1}}{4-5\sqrt{-1}}$ setzen zu können, muß man vorher erst wissen, daß beide Ausdrücke für einander gesetzt werden dürfen, d. h. daß sie einander „gleich" sind; d. h. man muß vorher wissen was „gleich" ist, ehe man an die erwähnte (eher ein einziges Merkmal als eine Definition aussprechende) Ansicht der „Gleichung zwischen imaginären Ausdrücken" gelangen kann. Dazu kommt noch, daß wir in der mathematischen Analysis häufig Gleichungen zwischen allgemeinen Ausdrücken haben, welche letzteren weder reel noch imaginär sind, weil sie eben so gut noch das eine wie das andere seyn können. Und doch muß man auch wissen, woran die Richtigkeit einer solchen allgemeinen Gleichung erkannt wird.

Die Richtigkeit der obigen speciellen Gleichung

$$\frac{23+2\sqrt{-1}}{4-5\sqrt{-1}} = 2+3\sqrt{-1}$$

weist man am gewöhnlichsten dadurch nach, daß man $2+3\sqrt{-1}$

mit dem Devisor $4-5\sqrt{-1}$ multiplicirt und zeigt, daß der Dividend $23+2\sqrt{-1}$ als Resultat der Multiplikation sich ergiebt. Dieses Verfahren müssen wir billigen, aber wir fragen: „in welchem allgemeinen Begriff der Gleichung“ ist dieses Verfahren allgemein enthalten oder gerechtfertigt? — Wir haben auch die Gleichung

$$\sqrt{-5-12\sqrt{-1}} = 2-3\sqrt{-1};$$

und wir würden ihre Richtigkeit dadurch nachweisen, daß wir $2-3\sqrt{-1}$ quadrirten und zeigten, daß das Resultat genau der Radikand $-5-12\sqrt{-1}$ der Quadratwurzel wird. Allein wir müssen noch einmal fragen: wo ist der allgemeine Begriff der Gleichung aufgestellt, nach welchem wir jede gegebene Gleichung prüfen könnten, ob sie richtig ist oder nicht? — Gehen wir aber noch einen Schritt weiter. Wir haben vorhin $2+3\sqrt{-1}$ mit $4-5\sqrt{-1}$ multiplicirt; haben wir aber in unserer mathematischen Analysis einen allgemeinen Begriff vom „Multipliciren“, so daß wir daran prüfen könnten, ob unsre Multiplikation auch richtig ist? — Was versteht man darunter „wenn a mit b multiplicirt werden soll“? — Die allgemeinste Definition vom Multipliciren, welche man in den Lehrbüchern aufgestellt findet, ist folgende: „es soll das Product ab aus dem Multiplikanden a so erzeugt werden, wie der „Multiplikator b aus der Einheit erzeugt ist.“ Und in der That erhält man aus dieser Definition nicht bloß $4 \cdot 3 = 12$, und nicht bloß $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, sondern auch $3 \cdot (-2) = -6$, $(-3) \cdot (-2) = +6$; $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{15}$ und $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = +\frac{8}{15}$, wie solches nach den praktischen Erfahrungen, die man bei den Anwendungen des Kalkuls gemacht hat, überall richtig ist. — Wollte man aber denselben Begriff der Multiplikation auch auf den Fall anwenden, wo $\sqrt{4}$ mit

$\sqrt{9}$ multiciplirt werden soll, so müßte man, da der Multiplikator $\sqrt{9}$ dadurch entstanden ist, daß man die Einheit 9 mal, und dann die Quadrat-Wurzel nimmt, (um $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$ zu erhalten) $\sqrt{4}$ zuerst 9 mal, und dann daraus die Quadrat-Wurzel nehmen. Dies würde aber $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = \sqrt{(9\cdot\sqrt{4})} = \sqrt{\pm 18}$ liefern; was faktisch unrichtig ist. Wollte man sich aus diesem Widerspruch dadurch zu ziehen suchen, daß man sagte: „eine angezeigte Wurzel ist noch keine Größe, man kann „daher nur die unter den Wurzeln verstandenen Größen nehmen, „und diese nur mit einander multipliciren wollen", — so würden wir ein anderes Beispiel vorlegen, nämlich $\sqrt{-4}$ mit $\sqrt{-9}$ multipliciren lassen, wo ein Rekurriren auf die, unter den Wurzeln vorgestellten Größen nicht gut möglich ist, während der obige Begriff des Multiplicirens jetzt

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9} = \sqrt{(-9\cdot\sqrt{-4})}$$

geben würde, was ebenfalls faktisch unrichtig ist, in so fern die weiteren Konsequenzen daraus offenbare Widersprüche enthalten. — Eben so würde nach der angeführten Definition des Multiplicirens

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{-\sqrt{-1}} = (\sqrt{\tfrac{1}{2}}) - (\sqrt{\tfrac{1}{2}})\cdot\sqrt{-1}$$

geben, was abermals faktisch unrichtig ist. — Und selbst wenn es gelänge auf irgend eine Weise auch dieses Beispiel zu beseitigen, wohin würde man gelangen? — offenbar zuletzt dahin, wohin wir wollen, nämlich zu einem *allgemeinen* Begriff des „Multiplicirens", der nach den von früher her überlieferten Ansichten uns zur Zeit noch gänzlich fehlt. — Werden sich aber nicht ähnliche Fragen in Bezug auf Potenzen und Logarithmen thun lassen? —

Die *vierte* Frage: wie lassen sich die Paradoxien des Kalkuls am sichersten vermeiden? — führt uns zu der Nothwendigkeit, den *Gegenstand* der mathematischen Analysis, ferner alle ihre *ersten* und *einfachsten* Begriffe, eben so wie die *Schluß*-

weisen, die in ihr angewendet werden, einer genauen Prüfung zu unterziehen. Solches hat aber der Verfasser dieser Bogen in der Zeit von 1811—1821 mit Eifer gethan, und er hat die Anfänge seiner Untersuchungen im Jahre 1816, und 6 Jahre später ein schon sehr glückliches Resultat in der (1822 erschienenen) ersten Auflage der beiden ersten Theile seines „Versuchs „eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik" bekannt gemacht. — Ist aber diese letztere Schrift auch nicht ohne Beifall geblieben —, hat der Absatz derselben es möglich gemacht die folgenden 5 Theile desselben Werkes liefern zu können —, sind kürzere Lehrbücher des Vfrs. bereits in zwei und mehr Auflagen verbreitet, — so weiß er sich doch auch noch sehr gut zu erinnern, wie wenig gefehlt hat, daß er nicht bei seinem ersten Auftreten von mehreren Mathematikern wegen seiner Ansichten geradezu für wahnsinnig erklärt worden ist; in amtlichen Gutachten wurde er sogar, wegen dieser revolutionären Ideen in der Wissenschaft, als ein gefährlicher Neuerer bezeichnet, und die meisten begnügten sich damit, entweder im Stillen die Achseln zu zucken, oder ihm öffentlich den Titel „anmaßend" beizulegen. — Der Vfr. hat sich durch diesen damaligen Widerstand bewogen gesehen, seine Ansichten einer immer wiederholten und wo möglich noch strengern Prüfung zu unterziehen, — hat seine Arbeiten dadurch mehr abgerundet und dem Erforderniß einer wissenschaftlichen Einheit immer entsprechender gemacht, ohne jedoch zu finden, daß seine allerdings revolutionäre Grundansicht eine wesentliche Aenderung vertrage oder ihrer bedürfe, da sich nach ihr alle früher bemerkten Widersprüche auf das harmonischte auflösen, oder, richtiger gesagt, nicht einfinden, und nur dann als aufgelöst oder beseitigt sich zeigen, wenn man diesen neueren Gang mit dem ältern, den der Vfr. den „bisherigen" nennt, vergleicht.

Der Vfr. ist in diesem Augenblick überzeugt, daß er seine Lehrbücher nur ruhig wirken lassen dürfe, um nach längerer Zeit seine Ansichten von den meisten Pädagogen adoptirt zu sehen, weil sie sich nebenbei (eben wegen der darin vorwaltenden wissen-

schaftlichen Einheit) durch eben so große Einfachheit als Bequemlichkeit für den Unterricht auszeichnen. In so fern sich aber Mathematiker vom Fach, wie z. B. Abel es gewesen ist, mit dem Lesen von Elementar-Lehrbüchern, auch wenn sie in ihnen die Quellen ihrer Klagen verstopft finden könnten, in der Regel nicht befassen, so versucht es der Vfr. in diesen Bogen, denselben seine Ansichten auf eine möglichst kurze und übersichtliche Weise vor Augen zu legen, und zugleich die wichtigsten Folgerungen hervorzuheben, welche sich für das sichere und nothwendig richtige Arbeiten mit unendlichen Reihen daraus ergeben.

Der Vfr. ist nämlich überzeugt, daß alle die Schwierigkeiten, denen man in der mathematischen Analysis begegnet, einzig und allein der allerersten Grund-Ansicht zuzuschreiben sind, der Ansicht nämlich, die man sich von dem Gegenstand und dem Wesen der mathematischen Analysis selbst gemacht hat. Es scheint ihm nämlich, als wenn man da stets den Zweck mit den Mitteln, die angewandt werden müssen, um den Zweck zu erreichen, verwechselt hätte. Der Zweck des Krieges ist — der Friede; wie unpassend wäre es aber und zu welchen irrigen Konsequenzen würde es führen, wenn man zu allgemein sagen wollte: „der Krieg sey die Lehre vom Frieden", oder „der Krieg beschäftige sich mit friedlichen Dingen?" — So mag der Zweck der mathematischen Analysis vielleicht jedesmal nur die Vergleichung der Größen seyn, aber es widerstrebt den Ansichten des Vfrs., sobald man sagt: „die Mathematik (also auch die mathematische Analysis als Theil derselben) sey die „Lehre von den Größen." — Der Vfr. hat im Gegentheil sich gezwungen gesehen, das Wesen der mathematischen Analysis viel abstrakter aufzufassen, und er glaubt der Wahrheit viel näher zu kommen, wenn er sagt: die mathematische Analysis sey die „Lehre von dem Verhalten derjenigen (sieben) (Verstandes-) „Thätigkeiten zu einander, auf welche die Betrachtung der Zahl „(der ganzen, unbenannten) führt", d. h. also: „die Lehre von

„den Gegensätzen" und den Beziehungen, in welchen diese erwähnten Verstandes-Thätigkeiten zu einander stehen.

Aus diesem Gesichtspunkt angesehen, stellen die Formen $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, a^b, $\sqrt[b]{a}$, $\overset{b}{log}\,a$ nicht Größen, sondern Verstandes-Thätigkeiten (in der Schulsprache: „angezeigte Operationen") vor, welche unter sich in Beziehungen stehen, die durch „Gleichungen" ausgesprochen werden. Jede „Gleichung" ist eine sogenannte identische, und jede solche Gleichung drückt nie etwas anderes aus, als das Verhalten der Operationen zu einander, so daß jede neue Gleichung dasselbe Verhalten nur in einer andern Modifikation ausspricht.*) Dies gilt nicht allein für jede Buchstaben-Gleichung, sondern auch für jede Ziffern-Gleichung, z. B. auch für die Gleichung $65+24=89$, nur daß bei letzterer die Bedeutung der einzelnen Ziffern noch hinzugetreten ist, sie selbst also nicht mehr in ihrer ursprünglichen Reinheit da steht, welches noch der Fall seyn würde, wenn man sie so schriebe

$$65+24=(60+20)+(5+4).$$

Denkt man sich nun diese Gleichungen in ihrer einfachsten Gestalt z. B. $a-(b-c)=a-b+c$; $\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$, $(a+b)c=ac+bc$; u. s. w. f.; so hat man die einfachen Gesetze, nach denen sich die Operationen (d. h. diese Verstandes-Thätigkeiten) richten; — und die Anwendung dieser Gesetze zur Bildung neuer und zusammengesetzterer „Gleichungen" macht das „Rechnen" aus, in welchem Begriff alles und jedes Rechnen, das gemeinste wie das späteste, enthalten ist.

---

*) Die sogenannten algebraischen und transcendenten Gleichungen (welche der Vfr. Bestimmungs-Gleichungen genannt hat) können nur als identische Gleichungen Sinn und Bedeutung und Geltung haben; und sie sind von den identischen dem Wesen nach gar nicht, der Form nach aber nur dadurch verschieden, daß in ihnen einer oder mehrere der Buchstaben bestimmte (in der Regel unbekannte) Ausdrücke vorstellen, die statt dieser Buchstaben gesetzt gedacht werden müssen.

Es giebt nur (unbenannte) ganze Zahlen; — was im praktischen Kalkul noch unter dem Namen der Zahl oder der Größe (der negativen, der gebrochenen, der imaginären) erscheint, das ist eben nichts anders als eine Verbindung zweier oder mehrerer ganzen Zahlen mit einander mittelst der erwähnten Verstandes-Thätigkeiten d. h. mittelst angezeigter Operationen. — Geht man aber ursprünglich von den ganzen unbenannten Zahlen aus, so läßt sich die Differenz $a-b$ entweder auf eine ganze Zahl zurückführen, oder — sie bleibt selbstständig, und im letztern Fall giebt sie den Begriff $b-b$ oder Null (0), oder den Begriff $0-(b-a)$ oder $0-c$, oder $-c$ (indem man sich die Null als Minuenden der Differenz bloß dazu denkt und solche nicht zu schreiben pflegt). Auch die Form $0+c$, die gewöhnlich $+c$ geschrieben wird, kann man sich nun denken. — Aber $+c$ und $-c$ und 0 sind weit davon entfernt „Größen" vorzustellen; sie drücken im Gegentheil nur das Daseyn von Zahlen-Verbindungen (d. h. von Verstandes-Thätigkeiten) aus, die sich nach bestimmten Gesetzen richten, so daß gerade deshalb mit diesen Ausdrücken selbst gerechnet werden kann.

Eben so läßt sich der Quotient $\frac{a}{b}$ oder $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ entweder auf eine positive oder negative ganze Zahl oder auf die Null zurückführen, oder er bleibt selbstständig; im letztern Fall entstehen die Begriffe der gebrochenen Zahl, so wie der positiv und negativ gebrochenen. Diese gebrochenen Zahlen sind also, nach dieser Ansicht, nicht „Größen", sondern Ausdrücke, die das Daseyn von Verstandes-Thätigkeiten bekunden, welche letztere sich nach bestimmten Gesetzen richten, so daß deshalb mit diesen Ausdrücken „gerechnet" werden kann.

Aber auch die Wurzel $\sqrt[b]{a}$ läßt sich entweder auf eine frühere Form (d. h. auf eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl oder auf die Null) zurückführen, oder — sie bleibt selbstständig. Im letztern Fall läßt sie sich aber immer auf die einfachste selbstständige Wurzel, nämlich auf $\sqrt{-1}$ bringen, so

daß alle Ausdrücke, welche selbstständige Wurzeln enthalten, die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ annehmen. — Der Logarithme $\overset{b}{log}\,a$ endlich ist (im Besonderen) nie selbstständig, sondern läßt sich immer auf eine reelle Zahl (d. h. auf eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl oder auf die Null), oder doch auf die imaginäre Zahl, d. h. auf die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ zurückführen.

Nach dieser Ansicht sind also die sogenannten reellen Zahlen eben so wenig „Größen" wie die imaginären. — Die reellen wie die imaginären Zahlen stehen hier in einer und derselben Kategorie; sie sind beide nichts anders als selbstständige Formen, d. h. angezeigte Operationen d. h. gedachte, also wirkliche Verbindungen der Zahlen mittelst der erwähnten Verstandes-Thätigkeiten, d. h. Ausdrücke, welche diese Verstandes-Thätigkeiten verbildlichen, während letztere nach bestimmten, in „Gleichungen" ausgesprochenen Gesetzen, sich richten, so daß diese Gesetze angewandt werden können, d. h. daß mit diesen Ausdrücken „gerechnet" werden kann.

Nach geschehener Andeutung dieser allgemeinen Ansichten muß nun gezeigt werden, wie diesen abstrakten Begriffen ein fester Träger unterliegt. Zuvörderst muß man aber bedenken, daß nach dieser Ansicht die Form des Ausdrucks zu gleicher Zeit sein Wesen ist. — Die Form verloren — alles verloren. — Die Form des Ausdrucks ist also der Träger des Begriffes, und die dieser Form zur Bedingung gemachten Eigenschaften sind die Merkmale desselben. Endlich ist in der Bestimmung: welche neue Form statt der alten, gegebenen gesetzt werden kann, — das Verhalten der Operationen zu einander ausgesprochen; daher hat die gesammte mathematische Analysis es nur mit der Umformung gegebener Formen zu thun. Nicht Größen sondern Formen sind deshalb der Gegenstand der mathematischen Analysis.

Daher erklären wir die Summe als einen Ausdruck von der Form $a + b$, oder $a + b + c$, ꝛc. ꝛc. begabt mit der Eigenschaft, daß in ihr die Elemente a und b, oder a, b, c, ꝛc. mit einander beliebig vertauscht werden können, d. h. daß $b + a$ statt $a + b$, oder daß die neuen Formen $a + c + b$, $b + a + c$, ꝛc. ꝛc. statt der alten $a + b + c$ gesetzt werden können, ohne daß man dabei befürchten muß, dadurch den Gesetzen der Operationen (d. h. den Gesetzen der hier zu betrachtenden Verstandes-Thätigkeiten) zu widersprechen.

Daher erklären wir die Differenz als einen Ausdruck von der Form $a - b$, begabt mit der Eigenschaft, daß $(a - b) + b$ mit a selbst vertauscht werden kann.

Daher erklären wir das Produkt als einen Ausdruck von der Form $a \cdot b$, $a \cdot b \cdot c$, ꝛc. ꝛc. begabt mit der doppelten Eigenschaft, einmal daß in ihr die Elemente a, b, c, ꝛc. beliebig mit einander vertauscht werden können, und dann daß auch $(a + b) \cdot c$ mit $ac + bc$ vertauscht werden kann,*) ohne daß man dabei zu befürchten hat, dadurch den Gesetzen der Operationen (d. h. der von der ganzen Zahl abstrahirten Verstandes-Thätigkeiten) zu widersprechen. —

Daher erklären wir den Quotienten als einen Ausdruck von der Form $\frac{a}{b}$, begabt mit der Eigenschaft daß $\frac{a}{b} \cdot b$ mit a selbst vertauscht werden kann.

Auf eine ähnliche Weise muß die Potenz a^x als ein Ausdruck erklärt werden, der diese bestimmte Form hat, und der entweder andere Ausdrücke von bestimmten Eigenschaften, oder diese Eigenschaften selbstständig repräsentirt.

Dann erklären wir die Wurzel als einen Ausdruck von der Form $\sqrt[b]{a}$, begabt mit der Eigenschaft, daß $(\sqrt[b]{a})^b$ mit a selbst vertauscht werden kann.

---

*) Die zweite dieser Eigenschaften spricht den Zusammenhang des Produkts mit der Summe aus. Die erstere Eigenschaft hat aber das Produkt mit der Summe gemein.

Endlich erklären wir den Logarithmen als einen Ausdruck von der Form $\overset{b}{log}a$, begabt mit der Eigenschaft, daß $b^{(\overset{b}{log}a)}$ mit a selbst vertauscht werden kann.

Nach Feststellung dieser allgemeinsten Begriffe der Summe $a+b$, der Differenz $a-b$, des Produkts $a\cdot b$, des Quotienten $\frac{a}{b}$, der Potenz a^b, der Wurzel $\sqrt[b]{a}$, und des Logarithmen $\overset{b}{log}a$, lassen sich nun die Begriffe: „addiren", „subtrahiren", „multipliciren", „dividiren", „potenziren", „radiciren" oder „wurzeln", und „logarithmiren" (a zu, von, mit, durch b) dadurch ganz allgemein feststellen, „daß man darunter respektive die Thätigkeiten versteht", mittelst welcher „diese 7 Formen gebildet werden". — Objektiv angesehen bestehen also diese Thätigkeiten bloß in dem Hinschreiben dieser Zeichen $a+b$, $a-b$, ꝛc. ꝛc.

Weil aber Begriffe nicht widersprechende Merkmale in sich aufnehmen dürfen, so muß man bei den Begriffen des Produkts und der Potenz vor allen Dingen darauf sehen, daß sich nicht die, jedem derselben beigelegten doppelten und dreifachen Eigenschaften widersprechen. — In so fern jedoch zu der Zeit, wo der Begriff des Produkts festgestellt wird, (da man ursprünglich von den unbenannten ganzen Zahlen ausgeht) nur die ganze Zahl oder die selbstständige Differenz $\alpha-\beta$ zweier (solcher unbenannten, ganzen) Zahlen vorkommt, so darf man nur vorher die speciellen Begriffe des Produkts ab festsetzen 1) wenn a und b ganze Zahlen, und 2) wenn a und b Differenzen ganzer Zahlen sind, und für diese speciellen Produkte die Nichtexistenz des zu fürchtenden Widerspruchs nachweisen. — Zu der Zeit aber, wo der Begriff der Potenz festgestellt wird, da hat man schon den (nicht selbstständigen und auch den) selbstständigen Quotienten $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$, dessen Dividend und Divisor solche Differenzen ganzer Zahlen sind, d. h. mit andern Worten, man hat bereits die so-

genannte reelle Zahl, mit welcher man nicht in Widerspruch gerathen darf.

Am schwierigsten bleibt auch nach dieser Ansicht das Fixiren des Begriffs der „Gleichung"; denn wenn wir auch den Zweck der Gleichung oben schon entschieden ausgesprochen haben, — wenn wir danach auch definiren können: „zwei Ausdrücke d. h. „zwei Formen (zwei angezeigte Operationen) sind einander gleich, „wenn sie unbedingt für einander gesetzt werden können, ohne „daß man dadurch befürchten muß den Gesetzen der Operationen „zu widersprechen", so müssen wir doch entschiedene äußere Kennzeichen haben, an denen die Richtigkeit oder Unrichtigkeit einer Gleichung erkannt werden kann. Man sieht also auch in Bezug auf die „Gleichung", wie kurz vorher in Bezug auf das „Produkt" und die „Potenz", das Bedürfniß hervortreten, diese hier vorläufig im Allgemeinen zusammengestellten Ansichten für die Schule zurecht zu legen, so daß sie ein in sich zusammenhängendes Gebäude bilden, welches überall die gewünschte Ueberzeugung gewährt. — Betrachtet man aber zwei Ausdrücke, welche im Allgemeinen einander gleich sind, im Besonderen, also in dem Fall, wo statt aller Buchstaben bestimmte Ziffern-Werthe gesetzt werden, so läßt sich dann aus dem Begriff der Gleichung allemal nachweisen, daß beide gleichen Ausdrücke entweder eine und dieselbe imaginäre Zahl $p+q\cdot\sqrt{-1}$, oder eine und dieselbe reelle Zahl vorstellen.

Wenn nach diesen Ansichten die gesammte mathematische Analysis es nie mit der „Größe" zu thun hat, so können in ihr auch nicht die Begriffe „größer" oder „kleiner" vorkommen, oder doch nur in einem ganz uneigentlichen Sinne. Und so ist es auch. — Den Zustand zweier reellen Zahlen a und b, in welchem $a-b$ einer positiven Zahl gleich wird, bezeichnen wir dadurch, daß wir sagen „a sey größer als b"; — und wenn wir sagen: „a sey kleiner als b", so setzen wir wieder voraus, daß a und b reelle Zahlen sind, (d. h. bloße Formen, bloße angezeigte Operationen, aus ursprünglich ganzen Zahlen mittelst der 4 erstern Operationen zusammengesetzt) und wir bezeichnen mit

dergedachten Redensart den Zustand dieser reellen Zahlen a und b, vermöge dessen a—b nicht positiv, sondern einer negativen Zahl gleich wird.

Auch nach dieser neuern Ansicht führen die Wurzeln aus positiven Zahlen zuerst zur sogenannten irrationalen Zahl, welche nichts anders ist als eine Summe von unendlich vielen Gliedern, also eine konvergente unendliche Reihe. Die mathematische Analysis darf aber nie Näherungs-Werthe anerkennen, sondern sieht die irrationale Zahl als eine wirkliche unendliche Reihe an, die, eben weil sie nicht abbricht, als der genaue Werth gedacht wird.

In den Anwendungen der mathematischen Analysis zur „Vergleichung der Größen" macht sich dies nachher anders. Jede Größe wird zunächst durch eine ganze, dann auch durch eine gebrochene benannte Zahl vorgestellt. Will man, so können auch negative benannte Zahlen eingeführt werden; doch kann dies immer nur in sehr seltenen Fällen geschehen, und am besten geschieht es gar nicht. Die Benennung oder die Einheit ist bei den benannten Zahlen allemal im Voraus festgesetzt, und es kommt nur jedesmal noch darauf an, die zugehörigen unbenannten Zahlen zu betrachten, mit einander zu vergleichen, oder zu finden. — Zwei Größen heißen „gleiche", oder die eine ist größer als die andere, wenn sie beide durch eine und dieselbe unbenannte Zahl, oder wenn die eine durch die „größere" unbenannte Zahl ausgedrückt ist, (in dem Sinne genommen, wie solcher kurz vorher für reelle Zahlen bestimmt worden ist, und) unter der Voraussetzung, die wir hier immer stillschweigend machen, daß die mit einander zu vergleichenden Größen als solche benannte Zahlen ausgedrückt gedacht werden, welche sich auf eine und dieselbe Benennung beziehen. Eine recht kleine Größe wird also durch eine recht kleine reelle und positive Zahl ausgedrückt. — Zeigen nun die Anwendungen, daß man eine sehr kleine Größe gegen eine andere außer Acht lassen kann, so kann man natürlich auch in dieser Anwendung die sehr kleine unbenannte Zahl, welche erstere vorstellt, gegen die un-

benannte Zahl, welche letztere ausdrückt, außer Acht lassen; und in so fern kann man dann auch Näherungs-Werthe setzen, statt einer irrationalen Zahl, oder überhaupt statt einer gegebenen Zahl, sobald β ein Näherungs-Werth von α dann genannt wird, wenn $\beta-\alpha$ positiv oder negativ aber an sich sehr klein ist.

Endlich muß man in der mathematischen Analysis von einander unterscheiden 1) die ganz allgemeinen Lehren, d. h. das ganz allgemeine Verhalten der Operationen zu einander, wo die Bedeutung der einzelnen Buchstaben ganz unbestimmt gelassen ist, von 2) den schon mehr besondern Untersuchungen (wohin z. B. die Betrachtung konvergenter Reihen, bestimmter Integrale, und dgl. gehören), bei denen man den Buchstaben bereits besondere Bedingungen untergelegt hat. Die ersteren d. h. die ganz allgemeinen Lehren, enthalten auch die ganz allgemeinen unendlichen Reihen, welche, eben weil sie allgemein sind, weder als divergente noch als konvergente bezeichnet werden können, während die wesentlichsten Anwendungen der mathematischen Analysis diese allgemeinsten Lehren deshalb am meisten in Anspruch nehmen, weil man so häufig mit Unbekannten rechnet, deren Verbindungen unter sich und mit Bekannten meist gar nicht dergestalt beurtheilt werden können, daß man im Voraus, noch ehe man damit rechnet, zu behaupten im Stande wäre, weder daß sie reell, noch daß sie imaginär sind, — oder daß die etwaigen Reihen, welche solche Verbindungen enthalten, konvergent oder divergent sind. Hätte man nun nicht allgemeine Lehren, welche uns die Ueberzeugung verschaffen, daß man mit solchen allgemeinen Ausdrücken doch richtig „rechne", so würde man das Rechnen selbst ganz unterlassen müssen, also gerade dasselbe Rechnen, dessen Zweck ist, die Unbekannten nach und nach zu finden. Dürfte man also z. B. mit unendlichen Reihen nicht eher rechnen, als bis man ihre Konvergenz außer Zweifel gestellt hat, so würde man manche und viele Anwendungen des Kalkuls ganz unterlassen müssen.

Um dies nur durch ein einziges Beispiel noch in etwas zu erläutern, betrachten wir den Taylor'schen Lehrsatz

$$f_{x+h} = f_x + df_x \cdot h + d^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + d^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

oder

$$f_{x+h} = f_x + f'_x \cdot h + f''_x \cdot \frac{h^2}{2!} + f'''_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots.$$

Wenn diejenigen Analysten Recht hätten, welche behaupten, daß man ihn nur dann anwenden dürfe, wenn er eine konvergente Reihe bilde, so würde man die Differential-Koeffizienten df_x oder f'_x, $d^2 f_x$ oder f''_x, ꝛc. ꝛc., nur unter der Voraussetzung gebrauchen dürfen, daß sie jedesmal reell seyen. Wie oft wendet man aber Gleichungen an wie z. B.

$$d(Cos\,x + \sqrt{-1} \cdot Sin\,x) = -Sin\,x + \sqrt{-1} \cdot Cos\,x$$
$$d^2(Cos\,x + \sqrt{-1} \cdot Sin\,x) = -Cos\,x - \sqrt{-1} \cdot Sin\,x$$

oder $d(e^{xi}) = i \cdot e^{xi}$; $d^2(e^{xi}) = -e^{xi}$, wo i die $\sqrt{-1}$ vorstellt? — Man kann freilich den Begriff der Konvergenz so verallgemeinern, daß er auch für Reihen brauchbar ist, deren einzelne Glieder imaginär sind; allein so wie man dies thut, so begegnet man, was die Theorie betrifft, neuen Schwierigkeiten, ohne doch die alten beseitigt zu haben.

Doch wollen wir in diesem Augenblick uns nicht weiter auf die unendlichen Reihen einlassen, sondern das für und wider bis zu dem Augenblick versparen, wo unsere Ansicht des Kalkuls zuvor schulmäßig begründet seyn wird, um dann die unendlichen Reihen nach derselben Ansicht gründlicher betrachten zu können. Diese Einleitung sollte nur darauf aufmerksam machen, 1) daß, wo mit Unbekannten gerechnet wird, man während der Rechnung häufig durchaus nicht beurtheilen könne, ob die Reihen, mit denen man zu thun hat, konvergent seyen oder nicht; eben so wenig als man aus derselben Ursache während der Rechnung oft durchaus nicht wissen kann, ob der Ausdruck mit dem man es gerade zu thun hat, reell ist oder nicht; gebrochen ist oder nicht; negativ ist oder nicht; ganz ist oder nicht; — 2) daß man daher mit unendlichen Reihen muß sicher rechnen können, auch wenn sie eben noch allgemein sind, so daß von ihrer Konvergenz oder Diver-

genz noch gar nicht die Rede seyn kann; 3) daß die Widersprüche, denen man im höhern Kalkul begegnen kann, ihre Quelle allemal nur in den allerersten Elementen haben können und haben, endlich 4) daß die von dem Vfr. seit 1822 vollständiger ausgesprochenen Ansichten ausreichen dürften, alle diese Widersprüche zu beseitigen, sobald nur bereitwilliges Eingehen in diese Ansichten zu Hülfe kommen will.

Es wird aber der Vfr. nun zunächst seine Ansichten nicht nur kurz und entschieden aussprechen, sondern auch dieselben schulgerecht zu begründen bemüht seyn.

Die mathematische Analysis
in ihrem Verhältniß zur Schule.

Erste Abtheilung.

Das Verhalten der 4 erstern Operationen zu einander.

Elementar=Algebra.

Erstes Kapitel.

§. 1.

Zuerst gehen wir von den (unbenannten ganzen) Zahlen aus. Zwei derselben, a und b, lassen sich in eine Zahl c dergestalt vereinigt denken, daß c so viele Einheiten hat, als a und b zusammen; und dann kann man, wenn c und b zuerst gesetzt sind, wiederum an die Zahl a denken, die zu b addirt, c wieder giebt. Diese beiden Denk-Geschäfte nennt man nun das Addiren (a zu b) und das Subtrahiren (b von c).*) Diese Denk-Geschäfte, welche man auch (Verstandes-)Operationen nennt, bezeichnen wir durch (+) und (—), und die gedachten Zahlen selbst durch a+b und c—b. Diese letzteren Formen aber (und nicht die darunter verstandenen Zahlen) nennen wir bezüglich Summe und Differenz. — Objektiv angesehen besteht also das Addiren und Subtrahiren in nichts Anderem als in dem Hinschreiben dieser Formen a+b und c—b.

§. 2.

Es folgt hieraus sogleich, daß wenn die Summen und Differenzen wirkliche ganze Zahlen vorstellen, dann

---

*) Wir machen den geneigten Leser noch in's Besondere darauf aufmerksam, daß man bei dem Streben nach strengster Begründung einer Wissenschaft, nichts voraus setzen darf. Daher wird hier selbst das gemeine Ziffern-Rechnen durchaus nicht vorausgesetzt, sondern solches nimmt erst später seine Stelle in dem Gebäude der gesammten Wissenschaft ein. — Was man indeß dort addiren und subtrahiren nennt, ist in der That kein Addiren und Subtrahiren mehr, sondern nur ein Umformen der durch das wirkliche Addiren und das wirkliche Subtrahiren erhaltenen Formen 24+35 oder 35—24, in die neuen Formen 59 und 11.

den Begriffen des Addirens und Subtrahirens gemäß, $a+b$ mit $b+a$, — ferner $(a+b)+c$ mit $(a+c)+b$ und mit $a+(b+c)$, — endlich $(c-b)+b$ mit c, vertauscht werden kann.

Nennt man daher zunächst zwei solche Formen oder Ausdrücke einander „gleich", welche eine und dieselbe (unbenannte ganze) Zahl bezeichnen und welche deshalb den Gesetzen der Operationen gemäß mit einander vertauscht werden können, und gebraucht man das Zeichen $=$, um dies auszudrücken, so hat man sogleich

1) $a+b=b+a$;

2) $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$;

für die Addition, — und

3) $(a-b)+b=a$

für die Subtraktion d. h. für ihr Verhältniß zur Addition.

§. 3.

Will man nun den Gegensatz zwischen der Addition und der Subtraktion und überhaupt das Verhalten dieser beiden Verstandes-Thätigkeiten zu einander ganz allgemein auffassen, so muß man vor allen Dingen die Begriffe der „Summe", der „Differenz" und der „Gleichung" verallgemeinern, um nicht mehr darauf achten zu müssen, daß die Ausdrücke wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen vorstellen. Zu dem Ende versteht man unter Summe $a+b$, oder $a+b+c$ (ohne sich mehr um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben zu bekümmern) die bloße Form, begabt mit der Eigenschaft, daß in ihr die Summanden in beliebiger Ordnung gedacht werden können; und unter Differenz $a-b$ versteht man nun auch die bloße Form, begabt mit der Eigenschaft, daß man überall $(a-b)+b$ mit a selbst vertauschen kann.*) Versteht man ferner unter Addiren und Subtrahiren noch immer nichts weiter als das Bilden dieser

---

*) Die Differenz $a-b$ repräsentirt also die Eigenschaft (und demnach jeden Ausdruck, der diese Eigenschaft hat), daß wenn der Subtrahend b zu ihr addirt wird, dann der Minuend a wieder kommt.

Formen $a+b$, $a-b$, — also, objektiv angesehen, das bloße Hinschreiben derselben, — so sind diese letztern Begriffe mit denen der Summe und der Differenz selbst zugleich verallgemeinert.

Nennen wir endlich, — um für diese allgemeinen Summen und Differenzen auch einen allgemeinern Begriff der „Gleichung“ zu haben, — zwei beliebige allgemeine Ausdrücke d. h. solche Formen (die durch so genannte angezeigte, aber vorher gedachte, also wirkliche Operationen entstehen) einander „gleich“, wenn sie, den Gesetzen der Operationen gemäß, mit einander vertauscht werden können, — so entsteht zunächst die Frage: was ist den Gesetzen der Operationen gemäß? — Da aber die Operationen zunächst von den unbenannten ganzen Zahlen abstrahirt sind, und man also nur mit diesen ganzen Zahlen allein in Widerspruch gerathen kann, so wird der Begriff der „Gleichung“ so seyn müssen, daß zwei Ausdrücke, welche im Allgemeinen als „gleiche“ anerkannt sind, in allen den besonderen Fällen, wo sie ganze (unbenannte) Zahlen vorstellen, auch allemal alle beide eine und dieselbe (ganze) Zahl vorstellen müssen.

Wenn also zwei Ausdrücke „gleich“ sind, sobald man sie, ohne den Gesetzen der Operationen zu widersprechen, unbedingt für einander setzen kann, so wird man die Gleichheit zweier durch (angezeigte) Addition und Subtraktion beliebig zusammengesetzter Ausdrücke daran erkennen, daß man nachweist, wie ein dritter Ausdruck existirt, welcher zu jeden der beiden erstern addirt, zwei Summen hervorbringt, die dadurch alle beide in einen und denselben Ausdruck übergehen, daß man auf sie die vermöge der Definitionen der Summe und der Differenz erlaubten Vertauschungen in Anwendung bringt, oder zwei Ausdrücke für einander setzt, die bereits in diesem Sinne als einander gleich anerkannt worden sind.

§. 4.

Aus diesen Definitionen folgt:

1) Sind zwei solche Ausdrücke einem dritten gleich, so sind sie auch unter sich gleich.

2) Gleiche solche Ausdrücke zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, geben wiederum gleiche solche Ausdrücke.

§. 5.

Mittelst dieser Sätze des §. 4. leiten sich aber aus den Gleichungen des §. 2., welche im §. 3. als allgemeine hingestellt worden sind, nämlich aus

$\odot$) $a+b=b+a$; I. $(a-b)+b=a$;

und aus

1) $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$

augenblicklich eine unzählige Menge neuer Gleichungen ab; namentlich noch

II. $(a+b)-b=a$; III. $a-(a-b)=b$;

und

2) $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)=a-(c-b)$;

3) $(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c)$.

Werden solche Gleichungen synthetisch als Lehrsätze hingestellt, so kann man sie alle dadurch beweisen, daß man zu jedem der beiden gleich seyn sollenden Ausdrücke einerlei Ausdruck addirt, (und zwar die in den Ausdrücken vorkommenden Subtrahenden) und nachweist, daß der Definition des §. 3. genügt ist, d. h. daß überall ein und derselbe Ausdruck sich ergiebt. — Nirgends aber hat man sich dabei um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben zu bekümmern, und sind diese letzteren in der That, sobald die Begriffe so allgemein aufgefaßt sind, nur die Träger der Operationen, d. h. der Verstandes-Thätigkeiten des Addirens und des Subtrahirens, letztere in ihrem gegenseitigen Verhalten zu einander und selbstständig angesehen.

§. 6.

Das, gegebenen Zwecken gemäße Ableiten neuer Gleichungen aus gegebenen, wird „rechnen" genannt.*)

*) Auf diesen ganz allgemeinen Begriff des „Rechnens" machen wir

Also können wir von nun an mit allen Summen und Differenzen „rechnen", ohne daß man sich um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben (d. h. der einzelnen Träger der Operationen) weiter zu bekümmern braucht.

§. 7.

Hat man eine Differenz a — b, so kann a dem b nicht gleich seyn, es kann aber auch a dem b gleich gedacht werden. In dem letztern Fall entstehen die Differenzen a — a, b — b, z — z, 2c. 2c., welche nach der Definition des §. 3. alle einander gleich sind, also nach §. 4. Nr. 1., den Gesetzen der Operationen entsprechend, alle für einander gesetzt werden können, und welche man daher alle durch ein und dasselbe Zeichen 0 (Null) bezeichnen kann und bezeichnet. — So führt sich also die Null ein, und kann in diesem Sinne fernerhin gebraucht werden.

---

unsre Leser hiermit besonders aufmerksam. Er enthält alles „Rechnen" in sich; er läßt sich aber für den Schulgebrauch auch mit folgenden Worten ausdrücken: „Rechnen" ist nichts anders als die, gegebenen Zwecken gemäße Auffindung neuer Formen, welche statt gegebener Formen mit dem Bewußtseyn gesetzt werden können, daß durch dieses Vertauschen den Gesetzen der Operationen nicht widersprochen wird.

Soll man z. B. 24 und 65 addiren, so erhält man zunächst aus obigem Begriff des Addirens die Form 24 + 65; nachdem nun das „Addiren" beendigt und das Resultat des Addirens nämlich die Form 24 + 65 erhalten ist, so fängt nun das „Rechnen" an, welches kein Addiren mehr ist, sondern nur das Umformen der Form 24 + 65 in neue Formen, nämlich zuerst in die Form (20 + 4) + (60 + 5), dann in die Form (20 + 60) + (4 + 5), hierauf in die Form 80 + 9, oder in die Form 89, während man bei dieser Umformung, da sie nach den Gesetzen der Operationen geschieht, das Bewußtseyn hat, daß diese neue Form 89 überall und unbedingt mit der alten Form 24 + 65 vertauscht werden kann, d. h. (in diesem besonderen Falle) daß die neue Form 89 keine Einheit mehr oder weniger bezeichnet, als die alte Form 24 + 65 deren bereits vorgestellt hat.

Wenn aber durch dieses einfache Beispiel hinreichend nachgewiesen seyn dürfte, daß das (hier später erst folgende) gemeine Ziffern-Rechnen, in der oben gegebenen Definition des Rechnens enthalten ist, so wird bei allen folgenden „Rechnungen" das gleiche nachgewiesen werden können, oder vielmehr von selbst in die Augen fallen.

Die Null ist demnach der Stellvertreter der Form $a-a$ (wo a ein bloßer Träger der Operation ist, der durch jeden andern ersetzt werden kann), welche Form sich aber nach den Gesetzen der Subtraktion richtet, so daß mit ihr auf eine bestimmt vorgeschriebene Weise „gerechnet" werden kann. Denkt man sich namentlich in §. 5. Nr. 2., entweder $c=a$, oder $c=b$, so ergiebt sich sogleich noch

1) $b+0=0+b=b$ und 2) $b-0=b$.

§. 8.

Dann aber kann man auch mit den Formen

$$0+b \quad \text{und} \quad 0-b$$

„rechnen", welche man jedoch gewöhnlich kürzer bloß so

$$+b \quad \text{und} \quad -b^{*})$$

schreibt. Namentlich findet sich sogleich aus §. 5. Nr. 2. u. Nr. 3., wenn man 0 statt b, und b statt c schreibt, oder durch ähnliche Substitutionen,

1) $+b=b$; 2) $a+(-b)=a-b$;
3) $a-(-b)=a+b$;
4) $(-a)+(-b)=-a-b=-(a+b)$.

§. 9.

Aus diesen letztern Gleichungen folgt weiter, daß man sich den, mittelst Addition und Subtraktion beliebig zusammengesetzten Ausdruck

$$a-b+c-d-e+f-g,$$

(der dadurch ein völlig bestimmter ist, daß man die einzelnen Theile in der Ordnung addirt und subtrahirt sich denkt, wie solche bei'm Lesen von der Linken zur Rechten auf einander folgen) allemal als die Summe

---

*) Diese Ausdrücke sind, da b noch ganz allgemein, als ein bloßer Träger der Operations-Zeichen gedacht wird, noch nicht diejenigen, welche später unter dem Namen der positiven und negativen Zahlen erscheinen. Diese Ausdrücke ($+b$, $-b$) kann man aber, wenn man will, bezüglich additive und subtraktive Ausdrücke nennen.

$$(+a)+(-b)+(+c)+(-d)+(-e)+(+f)+(-g)$$

denken kann. Daraus ergeben sich:

1) der Satz, daß die Glieder eines solchen zusammengesetzten Ausdrucks, den wir gerne algebraische Summe nennen, in beliebige Ordnung gestellt werden können, und

2) die Regeln für das praktische Addiren und Subtrahiren solcher Ausdrücke, d. h. für das Umformen der durch das wirkliche Addiren und Subtrahiren d. h. durch das Hinschreiben der Summe z. B. $(a-b+c)+(-m+n-p)$ oder der Differenz z. B. $(a-b+c)-(-m+n-p)$ unmittelbar erhaltenen Resultate, in Ausdrücke, welche wiederum die Form der algebraischen Summen haben, nämlich bezüglich in

$$a-b+c-m+n-p$$

und $a-b+c+m-n+p$.

§. 10.

Nach beendigter Lehre der ganz allgemeinen Summen und Differenzen und nach Hinstellung der daraus hervorgehenden Rechnungs-Regeln, kann man in das Besondere eingehen, d. h. in die Betrachtung dessen, was aus diesen allgemeinen Regeln dann hervorgeht, wenn man unter jedem Buchstaben eine (ganze, unbenannte) Zahl sich denkt, oder einen beliebigen Ausdruck, der aus ganzen Zahlen durch (angezeigte) Addition und Subtraktion hervorgegangen ist. Der Satz §. 9. Nr. 1. lehrt aber, daß unter dieser Voraussetzung jedes Endresultat auf die Form $\alpha-\beta$ gebracht werden kann, wo α und β beliebige und von einander ganz unabhängige wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen vorstellen. — Diese Form $\alpha-\beta$ verwandelt sich dann in

$0+\gamma$, d. h. $+\gamma$,

oder in 0,

oder in $0-\gamma$, d. h. $-\gamma$,

je nachdem α mehr, eben so viel, oder weniger Einheiten hat als β. — So entsteht die positive und die negative ganze Zahl.

Eine positive und eine negative ganze Zahl ist also jedes-

mal nichts anders als eine Form, welche durch angezeigte, also gedachte, mithin wirkliche Addition oder Subtraktion einer wirklichen (ganzen, unbenannten) Zahl, zu oder von der Null, entsteht, — und mit diesen Formen wird nach den in obigen Gleichungen ausgesprochenen Gesetzen der Operationen „gerechnet" (nach §§. 5. 6.).

Nach §. 8. Nr. 1. kann aber statt der positiven ganzen Zahl auch die absolute d. h. wirkliche ganze Zahl gesetzt werden und umgekehrt.

Wir haben also in dem Folgenden die wirklichen oder positiven ganzen Zahlen, die negativen ganzen Zahlen und die Null zu berücksichtigen, mit denen wir nicht in Widerspruch gerathen dürfen. Wir fassen aber diese drei Begriffe in den einzigen der Differenz $\alpha-\beta$ zweier ganzen Zahlen zusammen, um logisch sicher und zugleich bequem weiter gehen zu können.

Zweites Kapitel.

§. 11.

Die Begriffe des „Multiplicirens" und „Dividirens" stützen wir wieder auf die des Produkts ab und des Quotienten $\frac{a}{b}$ oder a:b. — Wir verstehen nämlich unter ersterem nichts weiter als das Bilden der letzteren Formen, — also, objektiv angesehen, das bloße Hinschreiben dieser Formen. Je allgemeiner also der Begriff des Produkts ab und des Quotienten $\frac{a}{b}$ hingestellt seyn wird, desto allgemeiner sind hiermit auch die Begriffe des „Multiplicirens" und des „Dividirens" aufgefaßt.

§. 12.

Um aber wieder schulgerecht vom Besonderen auszugehen, erklären wir zuerst das ganze Produkt ab als ein Zeichen von dieser Form (ab), in welchem der „Multiplikand" a schon ganz allgemein gedacht ist, der „Multiplikator" b dagegen eine wirkliche ganze Zahl vorstellt, und welches die Summe $a+a+a+\cdots$ von b Summanden bezeichnet.

Aus diesem Begriff leitet man sogleich ab:

1) $a(\beta+\gamma)=a\beta+a\gamma$ und 2) $a(\beta-\gamma)=a\beta-a\gamma$,

wo a ganz allgemein (ein bloßer Träger) ist, wo β und γ beliebige wirkliche ganze Zahlen sind, wo aber $\beta-\gamma$ ebenfalls eine wirkliche ganze Zahl vorstellen muß.

§. 13.

Hierauf definirt man das Differenz-Produkt ab als ein Zeichen von dieser Form (ab), in welchem a ganz allgemein gedacht ist, in welchem aber b eine beliebige Differenz

$\beta-\gamma$ zweier wirklichen ganzen Zahlen bezeichnet, und welches die Differenz $a\cdot\beta-a\cdot\gamma$ vorstellt; und diese Definition ist absichtlich der Nr. 2. des §. 12. entnommen, damit das Differenz-Produkt das im §. 12. definirte ganze Produkt als einen besonderen Fall in sich schließe.

In dieser Definition steckt aber:

1) $a\cdot 0=0$ und 2) $a(-\nu)=-a\cdot\nu$,

wo $-\nu$ eine negative ganze Zahl vorstellt; — und wir wissen also nun, was das bedeutet, wenn ein ganz allgemeiner Ausdruck a mit der Null oder mit einer negativen ganzen Zahl multiplicirt werden soll, d. h. was man, den Gesetzen der Operationen gemäß, statt der Produkte $a\cdot 0$ und $a(-\nu)$ setzen kann.

§. 14.

Hierauf stellt man die drei Lehrsätze hin

1) $ab=ba$; 2) $(ab)c=(ac)b=a(bc)$;

3) $(a+b)c=ac+bc=c(a+b)$,

und beweist solche einmal für den Fall, daß alle Buchstaben a, b, c wirkliche ganze Zahlen bezeichnen, und dann noch einmal auch für den Fall daß alle Buchstaben a, b, c beliebige Differenzen zweier ganzen Zahlen z. B. die Differenzen $\alpha-\beta$, $\gamma-\delta$, $\mu-\nu$ vorstellen. (Vgl. Syst. d. Math. Th. I. §§. 90. 91.)

Ist aber solches geschehen, so kann man nun das (ganz) allgemeine Produkt ab hinstellen, als ein Zeichen von dieser Form (ab), begabt mit der Eigenschaft, daß ab mit ba, — ferner abc mit acb, und mit a(bc), — endlich auch $(a+b)c$ mit $ac+bc$ vertauscht werden kann, ohne dadurch in irgend einem denkbaren besonderen Fall den Gesetzen der Operationen zu widersprechen; eben weil man in diesem Augenblick nichts hat als Differenzen ganzer Zahlen, für letztere aber die Zulässigkeit dieser Vertauschungen kurz vorher erwiesen worden ist.

Verstehen wir also immer, wie im §. 3., ganz allgemein unter „gleichen Ausdrücken" solche, die man, ohne den Gesetzen der Operationen zu widersprechen, unbedingt für einander setzen kann, so gelten die Gleichungen 1.—3., obgleich

a, b, c ganz allgemein als bloße Träger der Operationen gedacht sind, so daß von ihrer besonderen Bedeutung durchaus nicht mehr die Rede ist; und diese Gleichungen 1.—3. drücken nichts weiter aus, als: in welchem Verhältniß die abstrakt aufgefaßten und selbstständigen Operationen des „Multiplicirens“ und des „Addirens“ zu einander stehen.

§. 15.

Nun erklärt man den Differenz-Quotienten $\frac{a}{b}$ als ein Zeichen von dieser Form $\left(\frac{a}{b}\right)$, in welchem vorausgesetzt wird, daß a und b beliebige Differenzen ganzer Zahlen vorstellen, und welches diejenige Differenz ganzer Zahlen bezeichnet, die (nach §. 11. und §. 13.) mit dem „Divisor“ b multiplicirt, den „Dividenden“ a wieder giebt. — Es ist also

$$\text{I.}\quad \frac{a}{b}\cdot b = a.$$

§. 16.

Man überzeugt sich bald:

1) daß der Quotient $\frac{a}{b}$ nicht immer eine solche Bedeutung hat, d. h. daß nicht immer eine Differenz ganzer Zahlen existirt, die mit dem Divisor b multiplicirt, den Dividenden a giebt; und

2) daß in dem Fall, wo a und b der Null gleich sind, unendlich viele solche Differenzen ganzer Zahlen existiren, welche durch den Quotienten $\frac{a}{b}$ vorgestellt seyn können; endlich

3) daß, wenn man die Fälle in Nr. 1. u. Nr. 2. ausnimmt, der Differenz-Quotient dann allemal eine einzige bestimmte Differenz ganzer Zahlen vorstellt.

4) Die Behauptungen Nr. 2. u. Nr. 3. können auch so ausgesprochen werden: Wenn jede von zwei, durch A und B ausgedrückten Differenzen ganzer Zahlen, mit einer und derselben dritten, C multiplicirt wird (nach §. 11. und §. 13.), und wenn

man findet, daß $A \cdot C = B \cdot C$ ist, so ist nur dann nothwendig auch $A = B$, wenn C nicht Null ist.

Dieses letztere Ergebniß ist für die gesammte Analysis von ungemeiner Wichtigkeit. Es folgt nämlich daraus:

5) Aus gleichen Ausdrücken, welche einerlei Differenz ganzer Zahlen vorstellen, erhält man immer wieder gleiche Ausdrücke, wenn man sie mit gleichen Ausdrücken multiplicirt oder dividirt; sobald man nur nie durch die Null dividirt.

6) So oft also ein allgemeiner Divisor in besonderen Fällen der Null gleich wird, eben so oft lasse man die, einen solchen Divisor enthaltenden Gleichungen nicht mehr für nothwendig richtige gelten; d. h. man dividire nie durch Null.

Die Form $\frac{a}{0}$, deren Dividend a beliebig, deren Divisor aber die Null ist, ist daher in jeder Rechnung ganz unzulässig. So wie sie erscheint, so zeigt sie allemal an, daß für diesen besonderen Fall, der ihre Erscheinung bedingte, die allgemeine Rechnung eine Ausnahme erleidet, daß man also die allgemeine Rechnung jetzt (in diesem besonderen Falle) nicht mehr beibehalten dürfe, sondern daß man für diesen besonderen Fall eine besondere Rechnung anlegen müsse, wenigstens von da ab, wo man zum ersten Mal durch Null dividirt hat.*)

---

*) Man sucht z. B. den Durchschnitts-Punkt zweier, durch die Gleichungen $y = ax + b$ und $y = a^1x + b^1$ gegebenen Geraden. Existirt nun ein solcher Durchschnitts-Punkt, so müssen seine beiden Koordinaten-Werthe, statt x und y gesetzt, beide Gleichungen

$$1)\ y = ax + b \quad \text{und} \quad 2)\ y = a^1x + b^1$$

zu gleicher Zeit identisch machen; man findet also dieselben, wenn man diese Gleichungen nach y und x algebraisch auflöst. Man erhält aber, wenn y eliminirt wird,

$$3)\ (a - a^1)x = b^1 - b,$$

also, wenn $a - a^1$ nicht Null ist,

$$4)\quad x = \frac{b^1 - b}{a - a^1}.$$

Ist aber $a - a^1 = 0$ d. h. $a = a^1$, so darf man dieses Resultat 4.) nicht mehr gelten lassen, obgleich das Resultat 3.) noch gültig ist; die Gleichung 3.) geht aber nun in $0 = b^1 - b$ über und enthält einen Widerspruch, wenn nicht $b^1 = b$ ist, und dieser Widerspruch zeigt an, daß die Voraus-

§. 17.

Uebrigens leitet man nun, unter der Voraussetzung, daß alle Buchstaben Differenzen ganzer Zahlen bedeuten, aus den Gleichungen der §§. 14. und 15., nämlich aus

$$\odot)\ a \cdot b = b \cdot a; \qquad \text{I.}\ \frac{a}{b} \cdot b = a;$$

$$1)\ (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b \quad \text{und} \quad 4)\ (a+b)c = ac + bc$$

sogleich noch eine beliebige Menge neuer Gleichungen ab, darunter namentlich die Gleichungen

$$\text{II.}\ \frac{ab}{b} = a; \qquad \text{III.}\ a : \frac{a}{b} = b;$$

und

$$2)\quad \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c} = a : \frac{c}{b};$$

$$3)\quad \frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{bc};$$

$$5)\ (a-b)c = ac - bc;$$

$$6)\quad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}; \qquad 7)\quad \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c};$$

$$8)\quad \frac{a}{b} \pm c = \frac{a \pm bc}{b}; \qquad 9)\ a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c};$$

---

setzung der Existenz eines Durchschnitts-Punkts dasmal einen Widerspruch involvirt, d. h. daß dasmal kein solcher Durchschnitts-Punkt existirt, d. h. daß die beiden Geraden dasmal mit einander parallel laufen. —

Oder man soll den Quotienten

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots}{a^1 + b^1 x + c^1 x^2 + \ldots}$$

in eine Reihe verwandeln, die nach ganzen Potenzen von x fortläuft, d. h. man soll die Koefficienten P_0, P_1, P_2, rc. rc., der Reihe $P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \ldots$ finden, welche jenem Quotienten gleich ist. Man erhält zur Bestimmung von P_0 die Gleichung $a = a^1 \cdot P_0$, woraus $P_0 = \frac{a}{a^1}$ hervorgeht, wenn a^1 nicht Null ist. Ist aber $a^1 = 0$, so darf dieses allgemeine Resultat nicht mehr beibehalten werden, und die direkte und besondere Behandlung dieses Falles zeigt dann, daß dasmal die Reihe nicht mit einem solchen Gliede wie P_0, sondern mit dem Gliede $\frac{a}{b^1 x}$ beginnt.

$$10)\ \frac{A}{B} = z + \frac{A - Bz}{B},$$

so wie noch

$$11)\ \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a:c}{b:c};$$

wenn nur keiner der Divisoren der Null gleich ist, und wenn alle Quotienten ebenfalls Differenzen ganzer Zahlen sind.

Werden diese Gleichungen synthetisch hingestellt, so kann man sie auch alle dadurch beweisen, daß man in jeder derselben die beiden Ausdrücke links und rechts vom Gleichheitszeichen mit den vorkommenden Divisoren multiplicirt, und den Satz §. 15. Nr. 4. anwendet, oder zu beiden Seiten die subtrahirten Ausdrücke addirt und §. 3. eintreten läßt.

§. 18.

Jetzt kann man den Begriff des Quotienten $\frac{a}{b}$ ganz allgemein auffassen, indem man ein bloßes Zeichen darunter versteht von dieser Form $\left(\frac{a}{b}\right)$, begabt mit der Eigenschaft, daß man $\frac{a}{b} \cdot b$ überall mit a selbst vertauschen kann. — Der allgemeine Quotient $\frac{a}{b}$ representirt also die bloße Eigenschaft (und demnach auch jeden Ausdruck, der diese Eigenschaft hat), daß wenn er mit dem Divisor b multiplicirt wird, dann der Dividend a kommt.

§. 19.

Nennen wir dabei zwei Ausdrücke, welche auch noch (angezeigte) Divisionen enthalten, noch immer, wie im §. 3., dann „gleiche", wenn man sie, den Gesetzen der Operationen gemäß, unbedingt mit einander vertauschen kann, — so entsteht wieder die Frage, wie im §. 3.: Was ist den Gesetzen der Operationen gemäß? — Und darauf müssen wir wieder eine der im §. 3. mitgetheilten ganz analoge Antwort geben. Da wir nämlich bis jetzt nur Differenzen ganzer Zahlen kennen, wir also nur mit

diesen in Widerspruch gerathen könnten, so wird der Charakter der Gleichung so seyn müssen, daß zwei Ausdrücke, welche als allgemein gleiche anerkannt sind, auch in allen besonderen Fällen, also namentlich wenn alle Buchstaben Differenzen ganzer Zahlen bezeichnen, eine und dieselbe Differenz ganzer Zahlen vorstellen müssen. Die Gleichheit zweier durch (angezeigte) Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division beliebig zusammengesetzter Ausdrücke wird man also daran erkennen, daß man nachweist, wie ein dritter Ausdruck existirt, der nicht Null ist und welcher mit jedem der beiden erstern multiplicirt (§. 11. und §. 14.), Produkte hervorbringt, die dadurch alle beide in solche Ausdrücke übergehen, welche nach dem Kennzeichen des §. 3. einander gleich sind, — dadurch — daß man auf sie die, vermöge der Definitionen des Produkts und des Quotienten (§. 14. und §. 18.) erlaubten Vertauschungen in Anwendung bringt, oder zwei Ausdrücke für einander setzt, die bereits als gleiche erkannt worden sind.

§. 20.

Aus diesen Definitionen, in Verbindung mit denen des §. 11., folgt aber sogleich auch für Ausdrücke, welche noch Divisionen enthalten:

1) Sind zwei Ausdrücke einem dritten gleich, so sind sie auch unter sich gleich.

2) Gleiche solche Ausdrücke zu einander addirt, von einander subtrahirt, mit einander multiplicirt und durch einander dividirt, wenn man nur nie durch Null dividirt, wenn man also nur die einzige Bedingung macht, daß keiner der Divisoren Null ist, geben immer wieder gleiche Ausdrücke.

Daraus folgt aber nicht bloß die allgemeine Gültigkeit aller in den vorhergehenden Paragraphen bereits hingestellten Gleichungen, sondern es ist auch dadurch das allgemeine „Rechnen“ (nach §. 6.) mit allgemeinen Formen, innerhalb der vier bis jetzt betrachteten Operationen begründet, und nur die Aus-

nahme festzuhalten, daß man allgemeine Resultate nicht mehr gelten läßt, so oft einer der Divisoren (in irgend einem besonderen Falle der Anwendung) der Null gleich wird. — Und dabei braucht man sich nirgends um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben zu bekümmern, so daß eben deshalb überzeugend in die Augen fällt, daß, wie lange wir auch das „Rechnen" (im Sinne des §. 6.) fortsetzen mögen, jede einzelne Gleichung doch nie etwas anderes als das Verhalten dieser vier Operationen oder Verstandes-Thätigkeiten zu einander ausspricht, eine jede dasselbe auf die ihr eigenthümliche Weise.

Das Verhalten dieser vier Operationen zu einander ist aber auch schon in folgenden sieben Gleichungen vollständig ausgesprochen, nämlich in den Gleichungen

1) $a+b=b+a$; 2) $(a+b)+c=(a+c)+b$;
3) $(a-b)+b=a$; 4) $a \cdot b=b \cdot a$;
5) $(ab)c=(ac)b$; 6) $(a+b)c=ac+bc$;
7) $\frac{a}{b} \cdot b=a$.

Jede weitere Gleichung (die keine anderen als diese vier Operationen enthält) ist als aus diesen sieben Gleichungen hergeleitet anzusehen, so daß jede weitere Gleichung nur als ein besonderer Fall oder als eine Kombination aus zweien oder mehreren dieser sieben Gleichungen erscheint.

Die ersten beiden dieser sieben Gleichungen enthalten aber die Grund-Eigenschaft des Addirens, die dritte enthält die Definition des Subtrahirens, die vierte und fünfte enthalten die Grund-Eigenschaft des Multiplicirens, welche es mit dem Addiren gemein hat, und die sechste Gleichung drückt noch in's Besondere den Zusammenhang des Multiplicirens mit dem Addiren aus und vervollständigt das Wesen des Multiplicirens; die siebente dieser Gleichungen endlich enthält die Definition der Division.*)

---

*) Man kann auch so sagen: Von diesen sieben Gleichungen enthalten die erste und zweite den Charakter der Summe, die dritte die Definition der

Und so oft zwei „gleiche" Ausdrücke in einem besonderen Falle Differenzen ganzer Zahlen vorstellen, so oft stellen sie allemal eine und dieselbe vor; also stellen auch allemal zwei solche „gleiche" Ausdrücke eine und dieselbe wirkliche ganze Zahl vor, so oft sie überhaupt alle beide solche positive oder wirkliche ganze Zahlen bezeichnen; wie solches alles aus der gegebenen Definition der allgemeinen Gleichung mit Nothwendigkeit hervorgeht.

§. 21.

Macht man zunächst Anwendungen hiervon auf besondere Fälle, so erhält man sogleich aus den Begriffen der §§. 7. und 8. unmittelbar

1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$ 2) $\frac{0}{a} = 0;$

3) $a(-b) = (-b)(+a) = -ab;$

4) $(-a)(-b) = +ab = ab;$

5) $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b};$

6) $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}.$

Und daraus ergiebt sich wieder die bekannte Regel für das „praktische" Multipliciren der algebraischen Summen, sobald man nur den Satz des §. 9. und die Formeln für die Summen in Anwendung bringt. Dieses „praktische" Multipliciren ist nämlich kein Multipliciren, sondern eine Umformung des durch das wirkliche (d. h. angezeigte) Multipliciren erhaltenen Produkts in eine neue algebraische Summe.

Ganz die analoge Bedeutung hat es, wenn man vom Dividiren zweier algebraischen Summen spricht. Das wirkliche (d. h. angezeigte) Dividiren ist sogleich geschehen; aber das ge-

---

Differenz; die vierte und fünfte sprechen den Charakter des Produkts aus, den das Produkt mit der Summe gemein hat, während die sechste den Zusammenhang des Produkts mit der Summe nachweist, und dadurch den Charakter des Produkts vervollständigt. Die siebente endlich spricht die Definition des Quotienten aus; alles im allgemeinsten Sinne gedacht.

wünschte Resultat d. h. die Umformung der zuerst erhaltenen Form (des Quotienten) in eine algebraische Summe, kann nur durch Anwendung der Formel $\frac{A}{B} = z + \frac{A - Bz}{B}$ (§. 17. Nr. 10.) bewirkt werden, welche öfter wiederholt angewandt werden muß.*)

*) Soll z. B. die algebraische Summe

$$am - bm + cm - an + bn - cn + ap - bp + cp$$

durch die andere algebraische Summe

$$-m + n - p$$

dividirt werden, so erhält man zunächst aus der Definition des §. 11. das Resultat

$$\frac{am - bm + cm - an + bn - cn + ap - bp + cp}{-m + n - p}.$$

Nachdem auf diese Weise das Dividiren beendigt ist, so tritt das Umformen oder das „Rechnen" ein, und es muß daher nun dieses Resultat nach der oben angegebenen Formel umgeformt werden. Deshalb nimmt man statt des ersten Summanden z, entweder $-a$ oder $+b$, oder $-c$ (oder endlich auch irgend einen beliebigen vierten Ausdruck, der aber dann das Unzweckmäßige hat, daß der zweite Summand, der jedesmal dazu gefunden wird, nicht einfacher, sondern zusammengesetzter, wenn auch jedesmal ein richtiger wird). So verwandelt sich der vorliegende Quotient zunächst (wenn man nach der Formel §. 17. Nr. 10. den jedesmaligen zweiten Summanden dazu bestimmt) entweder in die Summe

$$-a + \frac{-bm + cm + bn - cn - bp + cp}{-m + n - p},$$

oder in die Summe

$$+b + \frac{am + cm - an - cn + ap + cp}{-m + n - p},$$

oder endlich in die Summe

$$-c + \frac{am - bm - an + bn + ap - bp}{-m + n - p}.$$

Mag man nun den einen, oder den andern, oder den dritten dieser letztern Ausdrücke nehmen, so verwandelt sich doch immer der zweite Summand, weil er wieder ein Quotient ist, nach derselben Formel abermals in eine Summe von zwei Summanden, von welcher der erste ganz willkührlich ist und jedesmal dem sich vorgesteckt habenden Zwecke gemäß gewählt wird. So erhält man als neue, den vorstehenden gleiche Formen die 6 nachstehenden:

$$-a + b + \frac{cm - cn + cp}{-m + n - p}, \quad \text{oder } -a - c + \frac{-bm + bn - bp}{-m + n - p},$$

$$\text{oder } +b - a + \frac{cm - cn + cp}{-m + n - p}, \quad \text{oder } +b - c + \frac{am - an + ap}{-m + n - p},$$

$$\text{oder } -c - a + \frac{-bm + bn - bp}{-m + n - p}, \text{ oder} - c + b + \frac{am - an + ap}{-m + n - p}.$$

§. 22.

Alle Endresultate, welche mittelst der vier bis jetzt genannten Operationen aus ganzen Zahlen zusammengesetzt sind, lassen sich allemal auf die Form $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ bringen, wo $\gamma-\delta$ nicht Null, sondern positiv oder negativ ganz ist, wo aber $\alpha-\beta$ entweder Null oder positiv ganz, oder negativ ganz seyn kann. Dieser Quotient zerspaltet sich daher in 5 verschiedene Formen nämlich in die Formen

$$(\odot)\ldots \qquad +\mu,\ -\mu,\ +\frac{\mu}{\nu},\ -\frac{\mu}{\nu} \text{ und } 0,$$

wo μ und ν beliebige wirkliche ganze Zahlen vorstellen, während $\frac{\mu}{\nu}$ keiner ganzen Zahl gleich seyn soll. — Die selbstständige Form $\frac{\mu}{\nu}$ wird nun eine gebrochene Zahl genannt, während die Formen $+\frac{\mu}{\nu}$ und $-\frac{\mu}{\nu}$ bezüglich positiv gebrochene und negativ gebrochene Zahlen heißen. — Diese fünf Formen aber, die alle in dem einzigen Begriff des „Quotienten $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ „zweier Differenzen ganzer Zahlen" enthalten sind, werden auch reelle Zahlen genannt (im Gegensatz zu neuen selbstständigen Formen, welche die Verallgemeinerung der Wurzeln später einführt).

Ein Bruch oder eine gebrochene Zahl ist also hiernach

In diesen 6 Ausdrücken kann man nun den jedesmaligen dritten Summanden, weil er abermals ein Quotient ist, nach derselben, oben im Texte angeführten Formel, wider in eine Summe von zwei Summanden verwandeln, von welchen der erste willkührlich gewählt werden kann. Wählt man nun diesen dem vorgesteckten Zweck der Vereinfachung der Resultate gemäß, so ergiebt sich (in diesem Beispiel) der zweite dazu gehörige Summand der Null gleich, so daß man diese 6 Resultate erhält, nämlich $-a+b-c$, $-a-c+b$, $+b-a-c$, $+b-c-a$, $-c-a+b$ und $-c+b-a$, von denen jedes statt des zuerst erhaltenen Quotienten gesetzt werden kann, weil es ihm nach dem im §. 3. gegebenen und im §. 18. wiederholten Begriff der Gleichung, „gleich" ist.

keine Größe, kein Theil eines Ganzen, sondern eine bloße angezeigte Division aus zwei ganzen Zahlen, welche selbstständig bleibt. — Später wird sich aber zeigen, daß die gebrochene benannte Zahl als ein Theil vom Ganzen, und, wie jede benannte Zahl, als eine Größe erscheint. Allein mit benannten Zahlen wird nie „gerechnet", weil nach §. 6. das „Rechnen" nur mit Ausdrücken d. h. mit angezeigten Operationen möglich ist. Dagegen wird mit den Brüchen, so wie solche so eben als angezeigte Divisionen definirt worden sind, ohne Weiteres nach den vorhergegangenen Paragraphen, welche von den Quotienten überhaupt handeln, „gerechnet", so daß eine eigene Lehre der Brüche, wie solche früher immer besonders vorgetragen werden mußte, nach dieser Ansicht eben so überflüssig ist, als wir im Vorhergehenden eine eigene Lehre „mit Positivem und Negativem „zu rechnen", für überflüssig finden mußten.

§. 23.

Sind a und b reelle Zahlen, so ist $a-b$ entweder positiv oder Null, oder negativ.*) Im erstern Fall sagt man: a sey „größer" als b, oder b sey „kleiner" als a; im andern Fall ist $a=b$; im dritten Fall endlich ist a kleiner als b, und b größer als a. — Die Zeichen $a>b$, oder $a<b$ drücken also nichts weiter aus als: $a-b$ ist einer positiven oder negativen, übrigens ganzen oder gebrochenen Zahl gleich.

Daraus folgt, so lange nur von reellen Zahlen die Rede ist:

1) Ist $a>b$, so ist auch $a \pm c > b \pm c$; dagegen $a \cdot c \gtrless b \cdot c$ und $\frac{a}{c} \gtrless \frac{b}{c}$, je nachdem $c \left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$ ist.

---

*) Man muß eigentlich sagen: $a-b$ ist entweder einer positiven Zahl, oder der Null, oder einer negativen Zahl „gleich"; denn die Form $a-b$ ist, eben weil sie diese Form ist, nicht auch zu gleicher Zeit eine andere Form, sondern kann nur in eine andere Form umgeformt werden, so daß dann letztere der erstern „gleich" ist. — Hiernach sind solche, in der Folge noch oft wiederkehrende Redensarten jedesmal zu verbessern.

2) Ist $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$.

3) Die Null ist größer als jede negative Zahl.

4) Jede positive Zahl ist größer als Null und auch größer als jede negative Zahl.

5) Eine negative Zahl ist desto kleiner, je größer ihr absolutes Glied ist.

6) Jeder ächte Bruch $\frac{a}{b}$ (wo $a < b$), ist kleiner als 1; jeder unächte Bruch $\frac{a}{b}$ (wo $a > b$), ist größer als 1.

7) Jeder Bruch ist kleiner als ein anderer, der bei demselben Nenner den kleinern Zähler, oder bei demselben Zähler den größern Nenner, oder endlich welcher den kleinern Zähler und gleichzeitig auch den größern Nenner hat.

8) Jede größere ganze Zahl hat mehr Einheiten als die kleinere.

9) Alle reellen ganzen und gebrochenen Zahlen lassen sich in eine Reihe gebracht denken, in welcher sie von $-\infty$ *) an durch 0 hindurch bis zu $+\infty$ hin immerfort „stetig" größer werden, und, rückwärts gelesen, „stetig" kleiner werden; d. h. zwischen je zwei Brüchen, oder zwischen einem Bruch und einer ganzen Zahl, wie wenig sie auch von einander verschieden gedacht werden mögen, lassen sich immer unendlich viele andere Brüche denken, welche alle größer sind wie der kleinere, aber kleiner wie der größere von beiden. Man kann dies auf folgende Weise anschaulich machen. Man denkt sich irgend einen Bruch z. B. $\frac{7}{3}$, so ist solcher „gleich" dem Bruche $\frac{7n}{3n}$; daher sind $\frac{7n-1}{3n}$ und $\frac{7n+1}{3n}$ zwei Brüche, welche bezüglich um $\frac{1}{3n}$ kleiner und

---

*) Das Zeichen ∞ soll hier allemal ausgesprochen werden durch unendlich, und soll eine positive Zahl vorstellen, welche immer noch größer gedacht wird als jede noch so groß schon gedachte aber bestimmte Zahl.

größer sind als $\frac{7}{3}$, wie man auch die ganze Zahl n sich denken mag. Denkt man sich daher die ganze Zahl n unendlich groß, d. h. immer noch größer als jede bereits noch so groß gedachte aber bestimmte ganze Zahl, so wird der Unterschied $\frac{1}{3n}$ zwischen je zwei nächst auf einander folgenden der drei Brüche

$$\frac{7n-1}{3n},\ \frac{7}{3} \text{ und } \frac{7n+1}{3n}$$

unendlich klein, d. h. immer kleiner noch als jede noch so klein gedachte aber bestimmte Zahl.

Dies verstehen wir aber darunter wenn wir hier (oder in der Folge) sagen: diese drei Brüche liegen an einander „stetig" an.

10) Unter den stetig an einander liegenden Brüchen haben bei Weitem die meisten einen unendlich großen Zähler und dann auch einen dazu gehörigen unendlich großen Nenner (während der Bruch selber ganz und gar nicht unendlich groß ist, sondern zwischen zwei andern einander nahe liegenden Brüchen mit endlichem Zähler und Nenner liegt). Diese heißen aber **irrationale Zahlen**, und die ganzen so wie die gebrochenen Zahlen mit endlichen Zählern und Nennern werden dann (im Gegensatz zu den irrationalen) auch **rationale** Zahlen genannt.

Drittes Kapitel.

§. 24.

Nun kann man, wieder vom Besonderen ausgehend, zuerst die ganze Potenz a^b als ein Zeichen definiren von dieser Form (a^b), wo der „Dignand" a ganz allgemein gedacht ist, der „Exponent" b aber eine positive (oder absolute) ganze Zahl ist, und welches das Produkt bedeutet $a \cdot a \cdot a \cdots$ von b Faktoren.

Aus dieser Definition folgt dann:

$$1)\ a^{m+n} = a^m \cdot a^n; \qquad 2)\ a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n};$$

$$3)\ (ab)^m = a^m \cdot b^m; \qquad 4)\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m};$$

und $$5)\ (a^m)^n = a^{mn}.$$

Hernach definirt man die Differenz-Potenz a^b als ein Zeichen von dieser Form (a^b), in welchem a ganz allgemein und b eine beliebige Differenz $\mu-\nu$ zweier ganzen Zahlen ist, und welches den Quotienten $\frac{a^\mu}{a^\nu}$ vorstellt, also das obige Produkt von $\mu-\nu$ Faktoren, so oft $\mu-\nu > 1$ ist, oder a selbst, wenn $\mu-\nu=1$, — oder 1, wenn $\mu=\nu$, also $\mu-\nu=0$, — oder endlich den Quotienten $\frac{1}{a^{\nu-\mu}}$, wenn $\nu>\mu$ oder $\mu<\nu$, d. h. wenn $\mu-\nu$ negativ ganz ist.

Man weist aber sogleich nach, daß dieselben oben stehenden 5 Gleichungen (Formeln oder Gesetze) auch noch für diese Differenz-Potenzen gelten.

§. 25.

„Die Potenz a^b bilden", also „hinschreiben", — dieses Geschäft mag man wieder das Potenziren (a mit b) nennen,

und dieser Begriff des Potenzirens erweitert sich, dadurch, daß man ihn wörtlich unverändert läßt, wiederum zugleich mit dem Begriff der Potenz a^b selbst.

§. 26.

Denkt man sich die stetig wachsende Reihe aller positiven ganzen und gebrochenen rationalen und irrationalen Zahlen von 0 bis ∞ mit irgend einer positiven ganzen Zahl m potenzirt, so erhält man wieder eine von 0 bis ∞ stetig wachsende Reihe.*) — Ist daher a irgend eine Zahl der letztern Reihe, so giebt es immer eine Zahl der erstern Reihe und immer nur eine einzige, welche mit m potenzirt, die Zahl a wieder giebt. Diese wird nun durch $\sqrt[m]{a}$ bezeichnet, und dieses Zeichen d. h. diese Form, heißt Wurzel. In diesem besonderen Falle gedacht, wo a Null oder positiv ist, mag sie die positive oder absolute Wurzel heißen. Sie besteht aus dem Radikanden a, und dem Wurzel-Exponenten m, welcher letztere immer positiv ganz gedacht ist.

Die durch die positive Wurzel $\sqrt[m]{a}$ vorgestellte positive Zahl existirt also immer, auch existirt immer nur eine einzige; und diese wird am häufigsten eine irrationale Zahl seyn, deren Existenz vorhin dargethan ist, die wir aber deshalb nie vollständig herstellen können, weil sie einen unendlich großen Zähler und einen unendlich großen Nenner hat, oder weil sie als eine unendliche Reihe von addirten Gliedern erscheint.

Einen Näherungs-Werth nennen wir diejenige ganze oder gebrochene Zahl, welche von der darzustellenden nur um eine sehr kleine Zahl verschieden ist. — In den Anwendungen zur Vergleichung der Größen kann man sich gewöhnlich eines Näherungs-Werthes statt des wahren und nie herstellbaren bedienen, wie aber dort erst nachgewiesen werden muß.

---

*) Es muß und es kann dies erwiesen werden. Vgl. das System d. Math. Th. I. §. 162. (2te Auflage.)

§. 27.

Für diese positiven Wurzeln lassen sich sogleich folgende Wahrheiten nachweisen, nämlich

I. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$; II. $\sqrt[m]{(a^m)} = a$;

1) $(\sqrt[m]{ab}) = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$; 2) $\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$;

3) $(\sqrt[m]{a^n}) = a^{\frac{n}{m}}$; 4) $\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)} = \sqrt[mn]{a}$;

5) $\sqrt[m]{(a^n)} = \sqrt[mp]{(a^{np})} = \sqrt[m:p]{(a^{n:p})}$;

wo aber die Potenz-Exponenten als Differenzen ganzer Zahlen, die Wurzel-Exponenten dagegen als positive ganze Zahlen, endlich die Dignanden und Radikanden alle als ganze oder gebrochene aber positive Zahlen (oder als Null, so lange nicht durch Null dividirt ist) vorausgesetzt werden müssen, weil sonst die eine oder die andere Seite dieser Gleichungen gänzlich ohne Sinn oder Bedeutung bliebe.

§. 28.

Der vorstehenden Gleichung 3.), — die bewiesen ist, so oft $\frac{n}{m}$ positiv oder negativ ganz oder Null, und wenn der Dignand a positiv vorausgesetzt ist, — kann man sich nun aber bedienen, um die reelle gebrochene (oder besser die reelle Quotienten-) Potenz einzuführen, d. h. die Potenz, deren Exponent beliebig reell, deren Dignand aber positiv (ganz oder gebrochen) oder Null (nie aber negativ) ist. — Man verstehe nämlich unter der „reellen Potenz" $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, wo a positiv oder Null, ν aber positiv ganz, μ dagegen entweder Null oder positiv oder auch negativ ganz vorausgesetzt ist, wo also $\frac{\mu}{\nu}$ Null oder beliebig positiv oder negativ ganz oder gebrochen seyn kann, — allemal

die positive Wurzel $\sqrt[\nu]{(a^{\mu})}$, welche immer positiv ist, immer existirt, aber auch zu gleicher Zeit immer nur eindeutig ist.

Und für diese reellen Potenzen läßt sich die Gültigkeit der 5 Gesetze des §. 24. abermals nachweisen, während die Nummern 3.) und 5.) des §. 27. ebenfalls noch gelten, auch wenn die Potenzen reelle sind.

§. 29.

Denkt man sich eine positive ganze oder gebrochene Zahl b, die größer als 1 ist, nach und nach mit allen stetig neben einander liegenden reellen Zahlen (von $-\infty$ bis zu 0, und dann von 0 bis zu $+\infty$ hin) potenzirt, so erhält man alle stetig neben einander liegenden positiven Zahlen, und zwar, weil $b^0 = 1$ ist, in der erstern Abtheilung alle von der kleinsten, der Null nächst anliegenden ab bis zur 1, in der andern Abtheilung dagegen alle von der 1 ab bis zu $+\infty$.

Umgekehrt: ist a irgend eine Zahl aus der letztern Zahlen-Reihe, d. h. irgend eine positive Zahl <1, $=1$, oder >1, so giebt es allemal eine negative Zahl, oder die Null, oder eine positive Zahl, und jedesmal nur eine einzige (die am häufigsten irrational seyn wird), mit welcher die, größer als 1 gedachte positive Zahl b potenzirt, die Zahl a wieder giebt.

Verstehen wir daher unter einem reellen Logarithmen das Zeichen $\overset{b}{log}\,a$ von dieser Form, in welchem a beliebig positiv, b dagegen beliebig positiv und >1 gedacht ist, und welches diejenige positive oder negative Zahl oder die Null bedeutet, mit welcher die „Basis" b potenzirt werden muß, damit der „Logarithmand" a sich wieder ergiebt, — so hat der reelle Logarithme jedesmal einen reellen Werth, und jedesmal nur einen einzigen, und solcher Werth ist negativ, Null oder positiv, je nachdem der Logarithmand a entweder <1, oder $=1$, oder >1 ist.*)

*) Es ist augenfällig, daß die Basis b der reellen Logarithmen auch

§. 30.

Für diese reellen Logarithmen lassen sich sogleich die Formeln erweisen:

1) $\overset{c}{log}(ab) = \overset{c}{log}\,a + \overset{c}{log}\,b$;

2) $\overset{c}{log}\left(\frac{a}{b}\right) = \overset{c}{log}\,a - \overset{c}{log}\,b$;

3) $\overset{c}{log}(a^b) = b \cdot \overset{c}{log}\,a$;

4) $\overset{c}{log}\sqrt[b]{a} = \frac{\overset{c}{log}\,a}{b}$;

5) $\overset{b}{log}\,a \cdot \overset{c}{log}\,b = \overset{c}{log}\,a$, also auch $\overset{b}{log}\,a = \frac{\overset{c}{log}\,a}{\overset{c}{log}\,b}$,

wo überall a, b, c positiv gedacht sind.

Obgleich nun Potenzen, Wurzeln und Logarithmen einen Gegensatz in Triplo bilden,*) und es die Aufgabe der mathematischen Analysis ist, diesen Gegensatz in seiner größten Allgemeinheit aufzufassen und hinzustellen, so giebt doch schon die Aufstellung der Potenz a^b und der Wurzel $\sqrt[m]{a}$ in dem besonderen Falle, wo a negativ ist, so viele Fragen zu erörtern, daß man wohl thut hier einen Abschnitt zu bilden, und zuvor, ehe man diese Untersuchungen weiter fortsetzt, in dem bereits erworbenen Gebiet der 4 erstern Operationen sich noch mehr umzusehen.

<1 seyn kann, wenn nur positiv. Ist aber $b<1$, so ist $\overset{b}{log}\,a$ gerade umgekehrt entweder positiv, oder Null, oder negativ, je nachdem $a<1$, oder $a=1$, oder $a>1$ ist. — Dagegen kann die Basis b nicht $=1$ genommen werden.

*) Wenn dem Addiren und dem Multipliciren nur eine indirekte Operation gegenüber liegt, nämlich bezüglich das Subtrahiren und das Dividiren, während dem Potenziren das Radiciren und noch das Logarithmiren folgt, so liegt dies einzig und allein darin, daß $a+b$ mit $b+a$, und auch ab mit ba, aber nicht a^b mit b^a vertauscht werden kann.

§. 31.

Die nächste Anwendung der bisher gefundenen allgemeinen Wahrheiten, ist die „Herstellung des Ziffern-Rechnens." — Alle ganzen und bestimmten Zahlen werden aber als Summen ausgedrückt, aus mehreren Einern, mehreren Zehnern, mehreren Hunderten, mehreren Tausenden, Zehntausenden, Hunderttausenden, Millionen u. s. w., welche letzteren wir deshalb als bekannte Zahlen ansehen, weil wir von ihnen wissen, daß sie die auf einander folgenden ganzen Potenzen von zehn sind, während wir die erstern zehn Zahlen als bekannt ansehen, weil wir ihre Folge im Gedächtniß haben, so daß dadurch z. B. sieben als die Summe aus sechs und eins definirt ist, während sechs wieder als die Summe aus fünf und eins definirt werden kann, u. s. w. f. — Es versteht sich dabei, daß, um alle bestimmten Zahlen auszudrücken, auch solche Summen nöthig werden, welche nicht gerade alle auf einander folgenden ganzen Potenzen von zehn zu Faktoren haben werden, da ja sogar schon ein einziges Produkt, z. B. 7 Tausend, eine bestimmte Zahl ist.

Diese Summe, wodurch jede bestimmte ganze Zahl ausgedrückt wird, muß wie jede Summe d. h. wie jede angezeigte Addition geschrieben werden. Allein gewöhnlich läßt man die Additions-Zeichen (+) ganz weg, läßt auch in den Produkten, aus denen die einzelnen Summanden bestehen, die Faktoren im Schreiben weg, welche Potenzen von Zehn sind, schreibt also z. B. bloß

7943283,

versteht aber darunter die Summe aus 7 Millionen und 9 Hunderttausend und 4 Zehntausend und 3 Tausend und 2 Hundert und 8 Zehnern und 3.

Nach dieser willkührlichen Annahme in Bezug auf das Schreiben der hier vorkommenden Summen, müssen die zuweilen fehlenden Summanden irgend wie ausgefüllt werden, damit jede Ziffer in der Stelle bleiben könne, in welcher sie ihre rechte Geltung hat. Dazu kann man nun die im §. 7. defi-

nirte 0 (Null) gebrauchen, da selbige die Eigenschaft hat, daß $0 \cdot b = 0$, und $a + 0 = a$ ist.

Danach bedeutet das Zeichen 10 die Summe aus 1 mal Zehn + 0, d. h. gerade Zehn. Danach bedeuten die Zeichen 100, 1000, 10000 u. s. w., Summen aus 3, 4, 5 und mehr Summanden, die aber bezüglich bloß den Potenzen von Zehn gleich sind, welche wir Hundert, Tausend, Zehntausend ꝛc. nennen.

So sieht sich die Null, welche man im §. 7. als Stellvertreter einer angezeigten Subtraktion eingeführt hat, hier zu gleicher Zeit auch brauchbar als Stellvertreter einer Ziffer in den aus mehrern neben einander geschriebenen Ziffern bestehenden Zeichen oder Formen, welche bestimmte ganze Zahlen ausdrücken, und welche numerische Zahlen genannt werden können.

Mit solchen Formen nun, wie 413, 6029, 700043, 62908047 u. s. w., da sie nur Stellvertreter von Summen d. h. von angezeigten Additionen sind, kann nun ohne Weiteres „gerechnet" werden, und zwar am bequemsten, wenn man auf selbige die Lehrsätze der algebraischen Summen anwendet.

Zwei solche bestimmte Zahlen, wie z. B. 413 und 6029, sind also zu einander addirt, wenn man $413 + 6029$ geschrieben hat, sie sind von einander subtrahirt, sobald man $6029 - 413$ hingeschrieben hat; und so wie man geschrieben hat die Form 6029×413, oder die Form $\frac{6029}{413}$, so sind dieselben Zahlen 6029 und 413 bereits mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt, alles genau nach den früheren Begriffen, wonach der Gedanke, und die Verbildlichung des Gedankens durch das Schreiben, die wirkliche Operation ist. — Diese durch das wirkliche Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren erhaltenen Resultate, nämlich die Summe $6029 + 413$, die Differenz $6029 - 413$, das Produkt 6029×413 und den Quotienten $\frac{6029}{413}$ will man aber gewöhnlich wiederum in solche, nach den ganzen Potenzen von zehn geordnete Sum-

men umformen, d. h. man will nach den ganzen Potenzen von zehn geordnete Summen (angezeigte Additionen) finden, welche der Summe 6029+413, oder der Differenz 6029—413, oder dem Produkt 6029×413, oder endlich dem Quotienten $\frac{6029}{413}$ bezüglich „gleich" sind; und zu dieser Umformung, welche nach §. 6. das „Rechnen" ist, müssen nun die hier früher mitgetheilten Gesetze des Operirens d. h. die Gleichungen, welche diese Gesetze aussprechen, benutzt und angewandt werden; und so zeigt sich das gemeine Ziffern-Rechnen in dem früher (§. 6.) definirten allgemeinen Rechnen enthalten. — Diese letztern Umformungen versteht man aber immer darunter, wenn man im praktischen Ziffern-Rechnen vom „Addiren", „Subtrahiren", „Multipliciren" und „Dividiren" spricht.

Diese (praktische) Division zweier ganzen Zahlen A und B, geschieht aber immer durch Anwendung der Formel §. 17. Nr. 10., indem man zum ersten Summanden z daselbst, da er im Allgemeinen beliebig gewählt werden kann, allemal die höchste Ziffer der höchsten Ordnung (der höchsten Potenz von zehn) nimmt, damit der nachher gefundene zweite Summand nur noch Ziffern niedrigerer Ordnungen in sich enthalten könne. — Die Division wird auch selten „aufgehen", sondern man wird in der Regel als Endresultat eine Summe finden aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruch, welche Summe auch eine gemischte Zahl genannt wird.

§. 32.

An das dekadische Zahlen-System schließt sich der „Decimalbruch" an, für welchen also die Regeln der Quotienten, oder der Summen gelten, je nachdem man ihn als einen Quotienten, oder als eine Summe von Produkten ansieht, deren Faktoren auch negative ganze Potenzen von zehn enthalten.

Die Division der Decimalbrüche, wenn sie genau ausgeführt werden soll, führt aber zu einer unendlichen Reihe, welche gewöhnlich ein „irrationaler Decimalbruch" genannt wird,

und für welche in den Anwendungen auf die Vergleichung der Größen ein Näherungs-Werth gesetzt werden kann. Bei einem solchen irrationalen Decimalbruch nähert sich die Summe von n Decimalstellen immer einer bestimmten, nicht unendlich großen Grenze, wenn auch n selbst unendlich groß gedacht wird; d. h. ein solcher irrationaler Decimalbruch ist allemal das, was später eine konvergente unendliche Reihe genannt wird.

§. 33.

Zu dem Ziffern-Rechnen gehört noch:

1) Das Potenziren einer gegebenen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Zahl, mit einer ganzen Zahl.

2) Das Wurzelausziehen aus einer positiven ganzen oder gebrochenen Zahl, genau oder näherungsweise.

Ist $\sqrt[m]{a}$ zu finden und ist dabei a irgend eine positive Zahl, so schreibt man

$$\frac{a \cdot z^{mn}}{z^{mn}}$$

wo $z > 1$ gedacht ist, statt a, — findet dann w so, daß $w^m < a \cdot z^{mn}$ und $(w+1)^m > a \cdot z^{mn}$ wird, und hat dann

$$\frac{w}{z^n} \quad \text{und} \quad \frac{w+1}{z^n}$$

als zwei Grenzen, zwischen denen $\sqrt[m]{a}$ liegt, und die um $\frac{1}{z^n}$ von einander verschieden sind, so daß dieser Unterschied kleiner wird als jede noch so klein gedachte aber bestimmte Zahl, wenn man n unendlich groß nimmt (und etwa $z = 10$ setzt).

3) Das Potenziren einer positiven ganzen oder gebrochenen Zahl mit irgend einer reellen Zahl (nach §. 28.).

4) Das Berechnen der reellen Logarithmen und

5) die Anwendung der Logarithmentafeln zur leichtern Ausführung aller der Rechnungen, welche hier an dieser Stelle ihren Platz haben.

Theoretisch steht aber hier an dieser Stelle allen diesen prak-

tischen Operationen, d. h. allen diesen Umformungen durchaus nichts im Wege; nur daß in allen den Fällen, wo unendliche Reihen entstehen, die Ausführung wegen unserer eigenen Endlichkeit nicht vollständig beendigt werden kann, so daß man in der Regel sich mit Näherungs-Werthen begnügen muß, die aber in den Anwendungen, welche vom Kalkul zur Vergleichung der Größen gemacht werden, statt der genauen Werthe gesetzt werden können, wie später bei der Betrachtung der Größen gezeigt werden muß. — In der Theorie, also im Kalkul, denkt man sich aber immer die unendlichen Reihen selbst, d. h. die genauen Werthe.

§. 34.

Die Anwendung der, in dem Vorhergehenden erworbenen Gesetze der Operationen, zur Umformung verwickelter Ausdrücke, die entweder bloß Buchstaben, oder Buchstaben und Ziffern untermischt enthalten, wird „Buchstaben-Rechenkunst" genannt. Sie unterliegt keinen weiteren Schwierigkeiten, so lange man keine anderen Potenzen betrachtet, als ganze und Differenz-Potenzen, oder reelle; keine anderen Wurzeln eintreten läßt als positive (oder, wie solche auch noch genannt werden, absolute), und keine anderen Logarithmen gebraucht als reelle, und wenn man dabei keinen Divisor zuläßt der Null ist, so wie keine Logarithmen-Basis, welche $=1$ ist.

Viertes Kapitel.

§. 35.

Wir haben bis jetzt gesehen:

1) Alle unsere Untersuchungen betreffen nur Gleichungen und Ausdrücke, die bloß angezeigte Operationen sind, also bloße Formen.

2) Jede Gleichung drückt nur das Verhalten der vier erstern Operationen zu einander aus, und dies gilt auch von den Gleichungen, welche noch Potenzen, Wurzeln und Logarithmen in sich aufnehmen, weil letztere drei Formen zur Zeit noch so speciell aufgefaßt sind, daß man sich ihre Bedeutung, also Produkte, Quotienten und positive oder reelle Zahlen, darunter denken kann und muß; oder mit andern Worten, weil die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen zur Zeit noch so speciell aufgefaßt wurden, daß sie noch nicht als selbstständige Formen aufgetreten sind.

3) Jede solche Gleichung gilt, eben weil sie nichts anders als das Verhalten der Operationen zu einander ausspricht, ganz unabhängig von dem, was jeder einzelne Buchstabe in ihr noch in's Besondere vorstellen kann, d. h. für jeden Werth eines jeden Buchstaben.

4) Man kann sich aber Gleichungen denken, welche nur dann erst richtige (wirkliche) Gleichungen sind, wenn statt eines oder statt einiger der in ihr vorkommenden Buchstaben z. B. x, z ꝛc. völlig bestimmte Ausdrücke gesetzt werden, — welche also nur dann erst richtige (wirkliche) Gleichungen sind, wenn unter x, z, ꝛc. ꝛc. diese bestimmten, oft noch unbekannten Ausdrücke gedacht werden. Solche Gleichungen heißen dann Bestimmungs-Gleichungen, weil sie in der Regel dazu benutzt werden, um die unbekannten Ausdrücke zu bestimmen, welche statt x, z ꝛc. ꝛc. gesetzt werden müssen, wenn man die (wirkliche)

richtige, gewöhnlich identisch genannte Gleichung haben will, d. h. wenn man die einzige Gleichung haben will die es giebt, und welche bloß das Verhalten der Operationen zu einander ausspricht. — Die Buchstaben x, z, ꝛc. ꝛc., die solche bestimmte Werthe vorstellen, heißen dann in der Regel die „Unbekannten". — Das Verfahren, welches angewandt werden muß, um aus der Bestimmungs-Gleichung die bestimmten Werthe des Unbekannten zu finden, nennt man das Auflösen der Bestimmungs-Gleichung nach diesem Unbekannten. Man theilt die Bestimmungs-Gleichungen auch ein in algebraische und in transcendente, und rechnet zu den algebraischen solche, in denen der Unbekannte, allgemein gedacht, nur in den bis hieher betrachteten allgemeinen Verbindungen vorkommt. Uebrigens wird der Theil der mathematischen Analysis, welcher sich mit den Bestimmungs-Gleichungen und namentlich mit deren Auflösung beschäftigt, die Algebra genannt, welche jedoch wieder in die niedere und in die höhere Algebra abgetheilt werden kann.

§. 36.

Nun folgt die Auflösung der algebraischen (Bestimmungs-) Gleichungen vom ersten Grade mit einem und mit mehrern Unbekannten, und im letztern Fall die Darstellung der verschiedenen Eliminations-Methoden ohne weitere Schwierigkeit. — Nur aus $ax = b$ darf man nicht folgern, daß $x = \frac{b}{a}$ wird, wenn $a = 0$ ist, weil man (nach §. 16.) nie durch Null dividiren darf. Im Gegentheil geht, wenn $a = 0$ ist, die Gleichung $ax = b$ in $0 \cdot x = b$ d. h. in $0 = b$ über, enthält den Unbekannten x gar nicht mehr, und ist entweder richtig, oder sie enthält einen Widerspruch, der das Nicht-Daseyn der Voraussetzung bekundet, welche zu dieser Gleichung geführt hat. (Vgl. §. 16. Note.)

Namentlich darf man also nicht sagen, daß $x = \infty$ wird, so oft in $ax = b$, a selbst der Null gleich werden sollte. Sind aber b und a positive Zahlen, so wird $x = \frac{b}{a}$ desto

größer, je kleiner a wird, und x wird unendlich groß, so oft a unendlich klein werden sollte, wenn nur der Buchstabe b den bestimmten Werth, den er einmal hat, beibehält.

§. 37.

Geht man nun über zu der quadratischen (Bestimmungs-) Gleichung $ax^2+bx+c=0$, so sieht man sogleich, daß die reine quadratische Gleichung $x^2=q$ die Auflösung $x=\sqrt{q}$ giebt, also im Allgemeinen keine Auflösung giebt, so lange nicht $\sqrt{q}$ für jedes q eingeführt ist.

Führt man aber für jedes allgemeine q die Quadrat-Wurzel $\sqrt{q}$ dadurch ein, daß man sie als ein Zeichen (als eine Form) definirt, begabt mit der Eigenschaft, daß $(\sqrt{q})^2$ mit q selbst vertauscht werden kann, — so folgt sogleich aus $x^2=(\sqrt{q})^2$ noch $(x-\sqrt{q})(x+\sqrt{q})=0$, d. h. $x=+\sqrt{q}$ und $x=-\sqrt{q}$; d. h. es giebt zwei einander nicht gleiche zusammengesetztere Formen, $+\sqrt{q}$ (d. h. $0+\sqrt{q}$) und $-\sqrt{q}$ (d. h. $0-\sqrt{q}$), welchen dieselbe Eigenschaft gleichmäßig zukommt; und es giebt nicht mehr als diese beiden. Daher stellt die allgemeine Quadrat-Wurzel $\sqrt{q}$ im Allgemeinen jede von zwei einander nicht gleichen Formen, nämlich $+\sqrt{q}$ und $-\sqrt{q}$ vor, wenn nicht in besonderen Fällen ausdrücklich eine bestimmte derselben allein vorgestellt seyn soll.

Die Folgerungen daraus sind höchst wichtig, namentlich:

A) Die allgemeine Quadrat-Wurzel $\sqrt{q}$ hat, wenn q positiv ist, zwei Werthe $+\alpha$ und $-\alpha$ (wo α der Werth der absoluten Wurzel $\sqrt{q}$ ist), von welchen der eine positiv, der andere negativ ist.

B) Die allgemeine Quadrat-Wurzel $\sqrt{q}$ bleibt eine selbstständige Wurzel, für die keine frühere (reelle) Form gesetzt werden kann, so oft q nicht positiv und auch nicht Null ist. Jeder Ausdruck aber, der nicht mehr allgemein und doch auch nicht reell (d. h. nicht positiv, negativ oder Null) ist, wird ein imaginärer genannt. Daher ist die allgemeine Quadrat-Wurzel in

jedem besondern Fall entweder ein reeller Ausdruck, oder, wenn selbstständig, ein imaginärer.

C) Für die allgemeinen Quadrat-Wurzeln, (also eben sowohl für die reellen wie für die imaginären) gelten von den Gesetzen der Wurzeln des §. 27., nämlich von den Formeln

$$\text{I. } (\sqrt{a})^2 = a; \qquad \text{II. } \sqrt{(a^2)} = a;$$

$$1)\ \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \qquad 2)\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

die Gesetze I., 1. und 2. ganz unbedingt, weil in I. beide Seiten der Gleichung nur einförmig sind, — in 1. und 2. dagegen beide Seiten der Gleichung genau zwei-förmig sind, so daß die eine Seite eben so vollständig ist, wie die andere; — dagegen gilt die II. nur dann unbedingt, wenn sie so geschrieben wird, nämlich

$$\text{II. } \sqrt{(a^2)} = \pm a,$$

in sofern nur dann rechts dieselben beiden Formen stehen, welche der Ausdruck zur Linken vorstellt.

D) Ist $\sqrt{a}$ allgemein (d. h. eben so gut noch reell als imaginär), oder ist $\sqrt{a}$ reell, oder ist $\sqrt{a}$ imaginär, so darf man

nicht $(p \pm q)\sqrt{a}$ statt $p\sqrt{a} \pm q\sqrt{a}$,

nicht $(\sqrt{a})^2$ oder a statt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$

schreiben und nicht aus $\sqrt{a} = \alpha$ und $\sqrt{a} = \beta$ folgern, daß auch $\alpha = \beta$ sey, wenn man sich nicht ganz genau vorher vergewissert hat, daß $\sqrt{a}$, so oft diese Form in einem und demselben Ausdruck erscheint, auch allemal einen und denselben ihrer beiden Werthe vorstellt. — Mit andern Worten: man behandle dieselbe Form, da sie zweideutig ist, wenn sie mehreremale erscheint, nicht so, wie wenn sie eindeutig wäre, sondern man denke immer daran, daß sie, obgleich dem äußern Ansehen nach eine und dieselbe Form, doch jedesmal einen andern ihrer beiden Werthe vorstellen kann.*)

E) Ist q negativ und $= -p$, so ist

---

*) Die Vernachlässigung dieser einfachen Regel ist, wie die Geschichte der mathematischen Analysis lehrt, eine fruchtbare Quelle von Widersprüchen oder sogenannten „Paradoxien des Kalkuls“ geworden.

$\sqrt{q}=\sqrt{-p}=\sqrt{p}\times\sqrt{-1}$, während $\sqrt{p}$ reell ist; so daß jede imaginäre Wurzel von der Form $\sqrt{-p}$ allemal auf die einfachere imaginäre Wurzel $\sqrt{-1}$ zurückgeführt werden kann.

F) Für das Rechnen mit imaginären (Quadrat-) Wurzeln giebt es natürlich keine anderen Gesetze oder Formeln, als die, welche es für die allgemeinen (Quadrat-) Wurzeln giebt, nämlich die in C. verzeichneten, jedoch mit gehöriger Rücksicht auf die in D. mitgetheiltenn Vorschriften. — Namentlich ist also

$$7\cdot\sqrt{-1}-2\cdot\sqrt{-1}=5\cdot\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$$

nur dann, wenn man die Rechnungen vorher so hat einrichten können, daß man völlig überzeugt ist, die $\sqrt{-1}$ stelle, so oft sie vorkommt, jedesmal genau eine und dieselbe der beiden Formen ($+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$) vor, welche mit ihr die, ihr Wesen ausmachende Eigenschaft gemein haben (nämlich, mit 2 potenzirt, wieder -1 zu geben.)

Im Allgemeinen also wird man, den Formeln C. gemäß,

$$7\cdot\sqrt{-1}-2\cdot\sqrt{-1}=(7\mp2)\cdot\sqrt{-1}$$

und

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{+1}=\pm1$$

nehmen müssen.

§. 38.

Die allgemeine Auflösung der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$ax^2+bx+c=0$$

giebt nun ohne weitere Schwierigkeit

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Sie giebt für den Unbekannten x zwei und nicht mehr als zwei (einander nicht gleiche) Werthe (d. h. Formen, die statt x gesetzt, die Gleichung $ax^2+bx+c=0$ zu einer richtigen (identischen) Gleichung, nämlich zu $0=0$, machen).

Betrachtet man aber diese allgemeine Auflösung in dem besonderen Falle, wo a, b, c nicht mehr bloße Träger der Operationen, sondern bereits als reelle Zahlen (d. h. als Ziffern-Ausdrücke von bestimmter Form) gedacht sind, so sind die beiden Werthe des Unbekannten x, beide reell, oder beide imaginär, je nachdem $b^2 - 4ac$ positiv oder negativ wird. In letzterm Falle aber kann man

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot \sqrt{-1}$$

schreiben, und man sieht daher, **daß dann die beiden Werthe von x auf die Form $p + q \cdot \sqrt{-1}$ gebracht werden können, wo p und q reell sind.**

§. 39.

Von nun an giebt es also unter den möglichen besonderen Rechnungs-Formen nicht bloß reelle, sondern auch imaginäre, letztere aber von der Form $p + q \cdot \sqrt{-1}$; und in diese Form kann man auch **alle** reellen Ausdrücke mit aufnehmen, weil man $q = 0$ sich denken kann. — Wir nennen daher die **Form** $p + q \cdot \sqrt{-1}$ **die allgemeine numerische Zahl.**

Wir bezeichnen durch i allemal eine und dieselbe der unter $\sqrt{-1}$ vorgestellten Formen, so daß dann $-i$ die andere ist. Ist dann $p + q \cdot i = r + s \cdot i$ **unter der Voraussetzung** daß p, q, r, s alle vier reell sind, so ist allemal einzeln

$$p = r \quad \text{und} \quad q = s.^{*)}$$

Hierauf gestützt findet man

1) $(\alpha + \beta \cdot i) \pm (\gamma + \delta \cdot i) = (\alpha \pm \gamma) + (\beta \pm \delta) \cdot i;$

2) $(\alpha + \beta \cdot i)(\gamma + \delta \cdot i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma) \cdot i;$

---

*) Weil sonst $i \left(= \frac{r-p}{q-s}\right)$ reell seyn würde. — Man findet zuweilen in analytischen Schriften aus $X + Y \cdot i = X' + Y' \cdot i$ gezogen die Gleichungen $X = X'$ und $Y = Y'$, während X, X', Y, Y' noch ganz allgemein sind. Dies ist aber allemal unrichtig, und man darf sich nicht wundern, wenn ein solches Verfahren zu Widersprüchen führt.

3) $\frac{\alpha+\beta\cdot i}{\gamma+\delta\cdot i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\cdot i$;

4) $\sqrt{\alpha+\beta i}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\times i$,

wo in Nr. 4. für die beiden äußern Quadratwurzeln, die als eindeutige und absolute gedacht werden, beide + oder beide — Zeichen genommen werden müssen, wenn β positiv seyn sollte, während dieselben beiden Wurzeln mit dem entgegengesetzten Vorzeichen d. h. die eine mit dem + die andere mit dem —Zeichen zu nehmen sind, wenn β negativ ist.

Es folgert daraus, daß alle Verbinduugen aus solchen reellen oder imaginären Formen, immer wieder zu denselben Formen führen. Ja, denkt man sich in der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$ax^2+bx+c=0$$

die Koefficienten a, b, c unter dieser Form $p+q\cdot i$, so wird sich aus vorstehenden Resultaten Nr. 1.—Nr. 4. sogleich ergeben, daß auch die beiden Werthe, die aus dieser quadratischen Gleichung für den Unbekannten x hervorgehen, immer wieder dieselbe Form annehmen können und müssen, d. h. allgemein-numerische Zahlen sind.

So lange man also nur mit den bis jetzt hingestellten Mitteln rechnet, so lange können keine neuen selbstständigen besonderen Formen entstehen, sondern alle, ursprünglich den ganzen wirklichen Zahlen ihr Daseyn verdankenden Ausdrücke, d. h. alle Ziffern-Ausdrücke, lassen sich allemal auf die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ oder $p+q\cdot i$ zurückführen, wo p und q reell sind, so daß sie auch der Null gleich seyn können.

§. 40.

Nun kann man zu den höheren algebraischen Gleichungen übergehen. — Man beweist zuerst auf einem der bekannten Wege

1) daß jede höhere Gleichung vom n^{ten} Grade, mit allgemein-numerischen Koefficienten (d. h. von der Form $p+q\cdot i$)

für den Unbekannten x einen Werth liefere von derselben Form $P + Q \cdot i$;

2) daß sie für den Unbekannten x auch allemal n solche Werthe liefere nicht mehr und nicht weniger, die jedoch in besonderen Fällen theilweise oder alle einander gleich werden können;

3) daß jede ganze Funktion von x vom n^{ten} Grade nämlich

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots + Px + Q$$

mit allgmein-numerischen Koefficienten (d. h. von der Form $\alpha + \beta \cdot i$) sich allemal in ein Produkt von n Faktoren zerlegen lasse (und dies nur auf eine einzige Art) von der Form

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdots(x-p)(x-q),$$

wo a, b, c, $d \cdots p$, q wiederum allgemein-numerische Ausdrücke (d. h. von der Form $\alpha + \beta \cdot i$), und zwar diejenigen Werthe sind, welche, statt x gesetzt, die ganze Funktion der Null gleich machen.

4) Sind die Koefficienten A, B, C, $\cdots$ P, Q alle reell, so lassen sich diejenigen unter diesen n Faktoren, welche imaginär seyn sollten, paarweise so ordnen, daß ein solches Paar dies Produkt

$$[x-(p+q \cdot i)] \cdot [x-(p-q \cdot i)] \text{ d. h. } x^2 - 2px + (p^2 + q^2)$$

liefert. Die obige ganze Funktion von x vom n^{ten} Grade hat also dann lauter reelle einfache oder doch lauter reelle einfache und Doppel-Faktoren (d. h. Faktoren von der Form $x^2 + rx + s$ mit reellen Koefficienten).

Die Lehre der höhern Gleichungen läßt sich übrigens nach Belieben weiter fortführen, ohne daß man besonderen Schwierigkeiten begegnete; namentlich lassen sich die Kennzeichen leicht auffinden, woran man erkennen kann, daß gleiche oder lauter verschiedene Werthe für den Unbekannten existiren.

§. 41.

Nun ist man im Stande die allgemeine m^{te} Wurzel einzuführen. — Unter $\sqrt[m]{a}$ versteht man nämlich ein Zeichen d. h. eine Form, begabt mit der Eigenschaft, daß $(\sqrt[m]{a})^m$ mit a selbst

vertauscht werden kann, während a ganz allgemein gedacht ist, m dagegen eine positive ganze Zahl vorstellt.

Versucht man es, zu bestimmen wie viele verschiedene, einander nicht gleiche, durch x bezeichnete Formen existiren, welche die durch $\sqrt[m]{a}$ vorgestellte Eigenschaft haben, so findet man, daß

$$x^m = a \quad \text{oder} \quad x^m - a = 0$$

seyn muß. Weil aber dies eine höhere Gleichung vom m^{ten} Grade ist, so giebt sie für x, m verschiedene Werthe, nicht mehr und nicht weniger. Also ist $\sqrt[m]{a}$ mförmig, und man bekommt alle diese m verschiedenen Formen, wenn man statt $\sqrt[m]{a}$ schreibt $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{1}$, dabei in dem letztern Produkt den erstern Faktor $\sqrt[m]{a}$ bloß einförmig sich denkt, dagegen unter $\sqrt[m]{1}$ deren m Werthe α, α^2, α^3, ... α^{m-1}, α^m oder 1 vorgestellt sieht, wo α noch näher bestimmt werden muß.*)

Daraus folgt:

A) Aus $A^m = B^m$ darf man nicht folgern, daß auch $A = B$ seyn müsse, sondern bloß daß $A\cdot\sqrt[m]{1} = B\cdot\sqrt[m]{1}$ ist, oder höchstens, daß $A = B\cdot\sqrt[m]{1}$ ist, d. h. daß man A erhält, wenn B mit einem, aber noch näher zu bestimmenden Werth von $\sqrt[m]{1}$ multiplicirt wird.

B) Alle Werthe von $\sqrt[m]{1}$ haben nothwendig die Form $p + q\cdot i$, welche Form wir die allgemein-numerische Zahl genannt haben.

C) Ist a reell oder imaginär aber von der Form $p + q\cdot i$, so sind alle m Werthe von $\sqrt[m]{a}$ reell oder imaginär aber von derselben Form $P + Q\cdot i$.

---

*) Daß, wenn α ein Werth von $\sqrt[m]{1}$ ist, dann allemal α^2, α^3, ... α^r, wo r beliebig ganz ist, ebenfalls (dieselben oder andere) Werthe von $\sqrt[m]{1}$ seyn müssen, folgt daraus, daß wirklich $(\alpha^r)^m = (\alpha^m)^r = 1^r = 1$ ist.

D) Für diese allgemeinen Wurzeln gelten folgende Gesetze:

$$\text{I. } \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a; \qquad \text{II. } \sqrt[m]{(a^m)} = a \cdot \sqrt[m]{1};$$

$$1)\ \sqrt[m]{(ab)} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}; \quad 2)\ \sqrt[m]{(a:b)} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b};$$

$$3)\ \sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)} = \sqrt[mn]{a};$$

so nämlich, daß auf beiden Seiten einer jeden dieser Gleichungen gleich viele und genau dieselben Werthe stehen, wie solches nach §. 3. von einer richtigen Gleichung verlangt werden muß.*) In demselben Sinne ist dagegen die Gleichung

$$4)\ \sqrt[m]{(a^n)} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n,$$

wo n positiv ganz oder negativ ganz oder Null gedacht wird, nicht richtig, weil der Ausdruck zur Linken m Werthe hat, während der Ausdruck zur Rechten deren weniger haben kann**) und nur dann eben so viele Werthe hat, wenn m und n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Diese Gleichung Nr. 4. ist daher (ungeschickt angewandt) als eine Quelle von Paradoxien des Kalkuls anzusehen.

E) Man darf

nicht $(p+q) \cdot \sqrt[m]{a}$ statt $p \cdot \sqrt[m]{a} + q \cdot \sqrt[m]{a}$,

und nicht $\left(\sqrt[m]{a}\right)^2$ statt $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a}$

setzen, und nicht aus $\sqrt[m]{a} = \alpha$ und $\sqrt[m]{a} = \beta$ folgern, daß auch $\alpha = \beta$ sey, wenn man nicht vorher überzeugt ist, daß dasselbe Zeichen $\sqrt[m]{a}$, so oft es in demselben Ausdruck vorkommt, auch jedesmal einen und denselben seiner m Werthe vorstelle, — eine Ueberzeugung jedoch, die man sich bei ganz allgemeinen Untersuchungen, der Natur der Sache gemäß, meist nicht verschaffen kann. — Eben so aber darf man nicht a statt

---

*) In der Nr. I. ist links und rechts nur ein einziger Werth. In Nr. II., so wie in Nr. 1. und in Nr. 2. sind links und rechts genau m Werthe, in Nr. 3. dagegen hat man links und rechts mn Werthe.

**) So hat z. B. $\sqrt[4]{(a^2)}$ die 4 Werthe $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$, $+\sqrt{-a}$, $-\sqrt{-a}$; dagegen hat $\left(\sqrt[4]{a}\right)^2$ nur die zwei Werthe $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$.

$\sqrt[m]{(a^m)}$ setzen, weil die letztere Wurzel einen von m verschiedenen Werthen vorstellt, der nicht gerade a zu seyn braucht, der aber ganz gewiß in $a \cdot \sqrt[m]{1}$ enthalten ist.

Ueberhaupt also: man behandle eine solche allgemeine m^te Wurzel, wie das was sie ist, nämlich als ein Zeichen, welches, so oft es erscheint, *eine* von m verschiedenen Formen vorstellt, oder alle m Formen zugleich, welches aber unbestimmt läßt, welche der letztern gerade gemeint sey, — und man wird nie in Widersprüche gerathen, während außerdem die *Mehrdeutigkeit der Wurzeln*, wenn sie nicht gehörig geachtet wird, eine *fruchtbare Quelle von Paradoxien des Kalkuls* wird.

§. 42.

Das Eliminiren eines Unbekannten aus zwei höheren algebraischen Gleichungen, so wie das Auflösen dieser Gleichungen stoßen nur auf praktische Hinderniße aber durchaus nicht auf theoretische, denen auf logischem Wege abgeholfen werden müßte.

Anmerkung 1. So genannte *transcendente* Bestimmungen, wie z. B. $a^x = b$, $a^{x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}} = b$, wo der Unbekannte x im Exponenten einer Potenz erscheint, können zur Zeit noch gar nicht vorkommen, weil wir eine Potenz, deren Exponent noch unbekannt ist, also auch imaginär seyn könnte, noch gar nicht gehabt haben, selbst nicht solche Potenzen, deren Dignand *allgemein* und deren Exponent reell und gebrochen wäre.

Anmerkung 2. Der binomische Lehrsatz für ganze Exponenten, der so leicht und einfach hinzustellen ist, also der Satz

$$(1+b)^x = 1 + \frac{x}{1} \cdot b + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \cdot b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot b^3 + \cdots,$$

wo x als eine positive ganze Zahl gedacht wird, hat zur Rechten $x+1$ Glieder. Es kann aber die Reihe zur Rechten bis in's Unendliche fortgehend gedacht werden, weil die Koefficienten aller nach dem $x+1^{ten}$ folgenden Glieder den Faktor Null in sich aufnehmen, daher selbst der Null gleich werden. — Denkt man

sich nun diese Reihe wirklich ohne Ende fortgesetzt, zu gleicher Zeit aber den Koefficienten $\frac{x(x-1)}{2}$ in $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2$,

den Koefficienten $\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ in $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$,

den Koefficienten $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ in $-\frac{1}{4}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{24}x^4$,

und so jeden der folgenden Koefficienten nach Potenzen von x geordnet, — so kann man rechts die Glieder nach den Potenzen von x ordnen, und man erhält

$$\begin{aligned}(1+b)^x = 1 &+ (b-\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{3}b^3-\tfrac{1}{4}b^4+\cdots \text{ in inf.})\cdot x\\ &+(\tfrac{1}{2}b^2-\tfrac{1}{2}b^3+\cdots \text{ in inf.})\cdot x^2\\ &+\cdots \text{ in inf.},\end{aligned}$$

so daß $(1+b)^x$ jetzt in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe umgeformt ist, deren Koefficientrn selbst wieder unendliche Reihen sind, die nach ganzen Potenzen von b fortlaufen. Diese Gleichung gilt nun für jede ganze positive Zahl x; — weil aber diese Reihe zur Rechten für ein allgemeines x gedacht werden kann, so giebt sie offenbar das Mittel ab, eine allgemeine Potenz a^x oder $(1+b)^x$ (für jedes x) einzuführen, wenn wir nur vorher die „Theorie der unendlichen „Reihen" auf eine Weise hingestellt haben werden, daß man auf selbige gründliche Untersuchungen bauen kann.

So sehen wir uns also, in dem Streben nach einem allgemeinen Auffassen des Gegensatzes in Triplo, der zwischen den drei letztern Operationen (dem Potenziren, dem Radiciren und dem Logarithmiren) besteht, so wie des Zusammenhangs dieser drei letztern Operationen zu den vier erstern, — die man die elementaren nennt, — wiederum, — wie früher schon einigemale, — zu den unendlichen Reihen geführt, und wir können daher deren nähere Betrachtung nun nicht länger mehr von uns abweisen.

Die mathematische Analysis

in ihrem Verhältniß zur Schule.

Zweite Abtheilung.

Das Verhalten der drei letztern Operationen zu einander und zu den vier erstern.

Analysis des Endlichen.

Fünftes Kapitel.

§. 43.

In der ganzen Funktion von x vom n^{ten} Grade d. h. in der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + px^{n-1} + qx^n,$$

kann man sich die positive ganze Zahl n so groß denken als man nur immer will; also kann man sich solche auch unendlich groß denken, d. h. immer größer noch als jede noch so groß gedachte aber bestimmte Zahl; also ist dadurch das Daseyn der „nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden unendlichen Reihe" mit Nothwendigkeit gegeben. — Diese unendliche Reihe ist aber nicht eher als vorhanden anzusehen, als nicht das Gesetz, nach welchem ihre Koefficienten sich richten, bis in's Unendliche fort bestimmt ausgesprochen ist.

Weil aber die nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe zugleich mit der ganzen Funktion von x vom unbestimmten Grade gegeben ist, so dürfen wir nicht nur sondern wir müssen auch zunächst mit diesen Formen, deren Glieder (nach einem bestimmten Fortschreitungs-Gesetz) in's Unendliche fortgehen, genau nach denselben Gesetzen „rechnen" wie mit den ganzen Funktionen von x vom unbestimmten Grade.

So wie aber die ganze Funktion von x aufhört eine solche zu seyn, und daher dann alle für sie als solche existirenden Gesetze außer Anwendung treten, so oft man dem x einen bestimmten Ziffern-Werth giebt, — eben so hört auch die unendliche Reihe auf nach den Gesetzen der ganzen Funktionen von x behandelt werden zu dürfen, sobald man dem Fortschreitungs-Buchstaben x irgend einen bestimmten Ziffern-Werth giebt.

Will man daher mit unendlichen, nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden Reihen nach den Regeln, die für die ganzen Funktionen von x gelten, mit völliger Sicherheit des Erfolgs „rechnen", so muß man zur ersten Bedingung machen, daß der Fortschreitungs-Buchstabe x ganz allgemein bleibe und daß man sich durchaus keinen bestimmten Ziffern-Werth darunter denke; daß er ein bloßer Träger der Operationen sey.*)

Aber eben deshalb werden wir in der Folge, wenn wir von einer allgemeinen unendlichen Reihe sprechen, das Prädikat: „nach ganzen Potenzen von x, oder von z, oder von φ ꝛc. ꝛc. „fortlaufend", — nicht immer hinzufügen, da sich das „nach „Potenzen fortlaufen" immer von selbst versteht, und der Fortschreitungs-Buchstabe nicht immer genannt zu werden braucht, wenn er nur sonst nicht verkannt werden kann.

§. 44.

Hieraus ziehen wir für solche allgemeine, nach ganzen Potenzen irgend eines Fortschreitungs-Buchstaben fortlaufende Reihen zunächst folgende Wahrheiten:

---

*) Man übersehe hier nicht, daß die ganze Analysis, d. h. der so genannte rechnende Theil der Mathematik, es nie mit Größen zu thun hat, daß man nie mit Größen „rechnen" kann und darf (§. 6.), daß man immer nur mit Formen rechnet (mit angezeigten Operationen) und daß eben deshalb auch das „Rechnen" mit unendlichen Reihen allemal aufhören muß, sobald die Form aufhört, mit welcher gerechnet werden kann und darf.

Dagegen kann man in der Folge, wenn einmal die allgemeine Potenz eingeführt seyn wird, eine solche nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe mit $x^{\pm\frac{\mu}{\nu}}$ multipliciren; so daß man eine Reihe erhält, die sogar mit negativen Potenzen von x beginnt, und nach gebrochenen Potenzen von x fortläuft. — Desgleichen kann man statt x z. B. $\frac{1}{z}$ oder z^{-1} setzen, so daß die Reihe nach steigenden und ganzen Potenzen von z^{-1}, und eben deshalb bei der geringsten Umformung (von $(z^{-1})^{\nu}$ in $z^{-\nu}$) nach negativen Potenzen von z fortläuft. Alles dieses kann aber auch mit der ganzen Funktion von x vom n^{ten} Grade vorgenommen werden, ohne daß sie dadurch ihren Charakter verliert.

1) Da eine ganze Funktion von x vom n^{ten} Grade lauter Null-Koefficienten haben muß, wenn sie für jeden Werth von x, also während x ganz allgemein bleibt, der Null gleich seyn soll,*) — so muß auch eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe lauter Nullen zu Koefficienten haben, wenn sie, während x ganz allgemein bleibt, allemal der Null gleich seyn soll.

2) Da zwei ganze Funktionen von x vom n^{ten} Grade, wenn sie für jeden Werth von x, also während x noch ganz allgemein bleibt, einander gleich seyn sollen, lauter bezüglich gleiche Koefficienten haben müssen, — so muß letzteres nothwendig auch dann der Fall seyn, wenn zwei nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihen einander gleich seyn sollen, wenn auch in ihnen der Fortschreitungs-Buchstabe ganz unbestimmt oder vielmehr ganz allgemein (ein bloßer Träger der Operationen) bleibt.**)

---

*) Wäre nämlich nicht jeder Koefficient der Null gleich, so würde man eine algebraische Gleichung haben, vom n^{ten} oder von einem niedrigern Grade, und dann würde sie nur höchstens für n oder noch für weniger Werthe von x, also nicht für jeden Werth von x bestehen.

**) Man hat für diese beiden Sätze verschiedene Beweise, die jedoch alle mit Recht angegriffen worden sind. — Wenn man aus

1) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ in inf. $= 0$

folgert, daß auch $a_0 = 0$ seyn müsse, weil sonst die Gleichung nicht für $x = 0$ bestände, während sie doch für jeden Werth von x bestehen soll, so mag dies noch angehen. Dann ist aber noch

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots = 0,$$

d. h. 2) $x \cdot (a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \cdots) = 0,$

und entweder $x = 0$, oder

3) $a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \cdots = 0;$

d. h. diese letztere Gleichung ist nur dann nothwendig richtig, wenn x nicht Null ist, weil für $x = 0$ der Gleichung 2. schon genügt ist, ohne daß der 2te Faktor $a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots$ der Null gleich zu seyn braucht, also ohne daß für $x = 0$ die Gleichung 3. richtig zu seyn braucht. Daß also nothwendig $a_1 = 0$ sey, kann man nun nicht mehr folgern, weil die Gleichung 3. für $x = 0$ nicht nothwendig statt findet.

Hält man aber die Ansicht der 4 vorhergegangenen Kapitel fest, so hat die Darstellung oben im Texte durchaus keine Schwierigkeiten.

§. 45.

Das praktische Addiren, Subtrahiren und Multipliciren zweier solchen nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden unendlichen Reihen R und S, d. h. die Umformung der Summe $R+S$, der Differenz $R-S$, und des Produkts $R \cdot S$ in eine ähnliche unendliche Reihe, hat, dem Vorangegangenen zufolge, durchaus keine Schwierigkeit.

Soll aber der Quotient $\frac{R}{S}$ oder $R \cdot \frac{1}{S}$ d. h. $\frac{1}{S}$ in eine ähnliche Reihe umgeformt werden, so werden die Koefficienten $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, 2c. 2c. einer unendlichen Reihe $\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1x+\mathfrak{A}_2x^2+\mathfrak{A}_3x^3+\cdots$ so gesucht, daß letztere, mit S multiplicirt, R oder 1 wieder giebt; die Multiplikation und die Vergleichung des Produkts mit der Reihe R, oder mit 1, findet nun aber ohne Ende fort statt; man erhält ohne Ende fort neue Gleichungen zwischen den Koefficienten, so daß aus jeder folgenden dieser Gleichungen auch jedesmal ein folgender der, Anfangs noch unbekannten Koefficienten $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, 2c. 2c., gefunden werden kann, und dies ohne Ende fort. Die neue unendliche Reihe $\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1x+\mathfrak{A}_2x^2+\cdots$ hat also ohne Ende fort die Eigenschaft, daß sie, mit S multiplicirt, eine neue Reihe giebt, welche ohne Ende fort mit der Reihe R oder mit 1 zusammenfällt. Da nun der Quotient $\frac{R}{S}$ oder der Quotient $\frac{1}{S}$ (nach §. 18.) eine bloße Form ist, welche die Eigenschaft repräsentirt (also auch jeden Ausdruck der diese Eigenschaft hat), daß nämlich $\frac{R}{S}$ mit S multiplicirt, R, — oder daß $\frac{1}{S}$ mit S multiplicirt, 1 wieder giebt, und da die gefundene unendliche Reihe $\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1x+\mathfrak{A}_2x^2+\mathfrak{A}_3x^3+\cdots$ diese Eigenschaft hat, so ist sie (nach §. 3.) dem Quotienten $\frac{R}{S}$ oder $\frac{1}{S}$ „gleich", und kann überall wo man „rechnet" statt des Quo-

tienten $\frac{R}{S}$ oder $\frac{1}{S}$ unbedingt gesetzt werden, ohne daß man fürchten müßte, dadurch mit den Gesetzen der Operationen in Widerspruch zu gerathen.*)

Zur Erläuterung muß hier aber noch hinzugefügt werden:

1) Die Koefficienten $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, 2c. 2c., bestimmen sich nicht, wenn mehr erste Koefficienten im Divisor S der Null gleich sind als im Dividenden R,**) mit andern Worten, wenn der Quotient $\frac{R}{S}$ auf die Form

$$\frac{x^m \cdot (b_m + b_{m+1} \cdot x^1 + b_{m+2} \cdot x^2 + b_{m+3} \cdot x^3 + \cdots)}{x^n \cdot (c_n + c_{n+1} \cdot x^1 + c_{n+2} \cdot x^2 + c_{n+3} \cdot x^3 + \cdots)}$$

gebracht werden kann, während $m < n$ ist, und b_m und c_n nicht mehr Null sind. Dies fällt auch ohnedies in die Augen, weil jetzt das Resultat der Umformung höchstens so werden kann:

$$\frac{1}{x^{n-m}} \cdot (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 x + \mathfrak{C}_2 x^2 + \mathfrak{C}_3 x^3 + \cdots).$$

2) Wenn gezeigt ist, daß die unendliche Reihe

$$\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 x^2 + \mathfrak{A}_3 x^3 + \cdots$$

dem Quotienten $\frac{R}{S}$ „gleich" ist, so versteht sich von selbst, daß dies nicht mehr von irgend einer endlichen Anzahl von Glie-

---

*) Man erhält auch dasselbe Resultat, wenn man die Formel (§. 20. Nr. 10.)

$$\frac{A}{B} = z + \frac{A - Bz}{B}$$

ohne Ende fort wiederholt anwendet und dabei nicht aus den Augen läßt, daß A und B hier wie ganze Funktionrn von x behandelt werden müssen. Wollte man bei dieser Division abbrechen, so würde zu der endlichen Anzahl der Glieder, die man schon hat, noch ein Ergänzungs-Glied hinzutreten, um eine richtige Gleichung zu haben; denkt man sich aber die Division wirklich ohne Ende fortgesetzt, so kann das Ergänzungs-Glied zu keiner Zeit eintreten.

**) Es wird nämlich dann die allgemeine Rechnung für $\mathfrak{A}_0$ die Form $\frac{q}{0}$ geben, welche Form nicht anzeigt, daß der Koefficient jetzt unendlich groß sey, sondern welche Form allemal anzeigt, daß die allgemeine Rechnung auf diesen besondern Fall keine Anwendung finde, und daß dieser Fall besonders behandelt werden müsse.

dern dieser Reihe gilt, wenn auch deren noch so viele genommen werden. — Wollte man daher von einer so gefundenen unendlichen Reihe nur eine Anzahl n ihrer ersten Glieder beibehalten, so müßte noch ein Ergänzungs-Glied hinzukommen, d. h. es müßte noch ein, in der Regel unbekannter, vielleicht nicht einmal in endlicher Form herstellbarer Ausdruck E noch so hinzugedacht werden, daß dann

$$\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1x+\mathfrak{A}_2x^2+\cdots+\mathfrak{A}_{n-1}x^{n-1}+E$$

dem Quotienten $\frac{R}{S}$ wiederum „gleich" ist. — Dieses Ergänzungs-Glied E ist (zwar nicht in dem vorliegenden Falle aber in den folgenden Entwickelungen) in der Regel nichts weiter als ein Zeichen, welches eben die Summe aller folgenden unendlich vielen Glieder der, Anfangs gefundenen unendlichen Reihe, also selbst wieder eine unendliche Reihe vorstellt.

3) Da die Koefficienten der unendlichen Reihen R und S beliebig sind, so können sie auch von einem gewissen Gliede ab, alle bis in's Unendliche fort, der Null gleich gedacht werden. In diesem Falle hat man dann eine gebrochene rationale Funktion von x, also z. B.

$$\frac{1}{1+x},\quad \frac{1}{1-x},\quad \frac{1-x}{1+x^2},$$

und allgemein

$$\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}{c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n}$$

in eine unendliche Reihe umgeformt, welche überall und unbedingt für sie gesetzt werden kann, ohne daß man dabei befürchten müßte dadurch den Gesetzen der Operationen entgegen gehandelt zu haben.

§. 46.

Da, wenn m eine positive ganze Zahl ist, die m^te Potenz einer nach ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihe R, nichts weiter ist, als das Produkt R·R·R···· von m Faktoren, so

steht der Umformung von R^m, wenn m positiv ganz ist, in eine ähnliche Reihe, nichts im Wege. Dasselbe ist aber auch mit R^{-m} der Fall, weil $R^{-m} = \frac{1}{R^m}$ ist und die Division nach §. 45. ausgeführt werden kann. — Von einer gebrochenen Potenz einer unendlichen Reihe kann dagegen zur Zeit durchaus noch nicht die Rede seyn, da wir jetzt noch keine anderen gebrochenen Potenzen kennen, als nur solche, deren Dignanden positiv sind (vgl. §. 28.), eine solche Reihe R hier aber immer als eine allgemeine Form angesehen wird, bei welcher man sich um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben durchaus nicht bekümmert.

Soll aber aus einer solchen, nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden Reihe R die m^te Wurzel gezogen werden, d. h. soll $\sqrt[m]{R}$ selbst wieder in eine solche Reihe verwandelt werden, so soll man die Koefficienten $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ꝛc. ꝛc., einer unendlichen Reihe $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 x^2 + \mathfrak{A}_3 x^3 + \cdots$ so finden, daß, wenn letztere mit der positiven ganzen Zahl m potenzirt wird, die Reihe R wieder hervorgeht. Erhebt man aber diese Reihe

$$\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 x^2 + \mathfrak{A}_3 x^3 + \cdots$$

wirklich zur m^ten Potenz, und vergleicht man das Resultat mit der Reihe R, so erhält man, da die Koefficienten der gleichnamigen Potenzen von x dieselben seyn müssen, eine unendliche Anzahl von Gleichungen zwischen diesen Koefficienten, von denen jede folgende ohne Ende fort jedesmal einen folgenden der, Anfangs unbekannten Koefficienten $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ꝛc. ꝛc., finden läßt. Also existirt eine unendliche Reihe $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 x^2 + \mathfrak{A}_3 x^3 + \cdots$, welche, wenn sie mit m potenzirt wird, eine neue unendliche Reihe giebt, deren Glieder ohne Ende fort mit den Gliedern der Reihe R zusammenfallen. Da nun $\sqrt[m]{R}$ jeden von m Ausdrücken vorstellt, der die Eigenschaft hat, daß er mit m potenzirt, den Radikanden R wieder giebt (nach §. 41.), und da die so bestimmte unendliche Reihe $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 x^2 + \mathfrak{A}_3 x^3 + \cdots$ diese Eigenschaft hat, so

hat man die allgemein richtige Gleichung (§. 3.)

$$\sqrt[m]{R} = \sqrt[m]{1} \cdot (\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 x^2 + \mathfrak{A}_3 x^3 + \cdots),$$

im Falle man die Koefficienten $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, rc. rc., nur eindeutig genommen hat, um die zusammengehörigen Werthe besser herausfinden zu können.

Man findet jedoch bei der Ausführung selbst die Ausnahme daß sich die Koefficienten $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, rc. rc., nicht bestimmen, so oft einige aber nicht genau m, oder nicht genau 2m, oder überhaupt nicht genau νm der ersten Koefficienten von R hinter einander der Null gleich sind.*) Dies fällt aber auch direkt in die Augen, weil dann die Reihe R auf die Form

$$x^n \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots)$$

gebracht werden kann, und eine m^{te} Wurzel in der verlangten Form also nur dann möglich ist, wenn $n = \nu m$ ist, unter ν irgend eine positive ganze Zahl verstanden.

Die nach ganzen Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe R, deren m^{te} Wurzel in eine neue solche unendliche Reihe umgeformt ist, kann auch von einem gewissen Gliede ab, lauter Nullen zu Koefficienten haben, so daß sie nichts weiter ist, als eine ganze Funktion von x vom n^{ten} Grade. Nach dem Vorstehenden kann man also auch die m^{te} Wurzel aus einer ganzen Funktion von x (mit Zulassung der oben angeführten Ausnahme) in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandeln.

Nun kann man aber auch eine irrationale gebrochene Funk-

---

*) Es nehmen nämlich die Ausdrücke für die Koefficienten $\mathfrak{A}_1$, oder $\mathfrak{A}_2$, oder $\mathfrak{A}_3$, oder rc. rc., die Form $\frac{q}{0}$ an, welche Form allemal anzeigt, daß der besondere Fall, der zu dieser Form führt, in der allgemeinen Rechnung nicht enthalten ist, daß daher die Rechnung für diesen besondern Fall noch besonders geführt werden muß. — Es kann aber dabei Niemandem im Ernst einfallen, zu behaupten, daß der Koefficient $\frac{q}{0}$ unendlich groß sey.

tion in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe umformen, und zwar allemal, so lange die Koefficienten noch alle ganz allgemein sind, während die Umformung für besondere Werthe der Koefficienten, d. h. wenn gewisse Koefficienten Nullwerthe haben, eine Ausnahme erleiden kann. — Man hat nämlich wenn R und S ganze Funktionen von x sind, also $\frac{R}{S}$ eine gebrochene rationale Funktion von x ist, $\sqrt[m]{\frac{R}{S}} = \frac{\sqrt[m]{R}}{\sqrt[m]{S}}$, wo rechts der Zähler und der Nenner und folglich auch der Quotient selbst in eine ähnliche Reihe umgeformt werden kann, wenigstens so lange die Koefficienten ganz allgemein gedacht sind, und noch keiner derselben den Werth Null angenommen hat. Dasselbe gilt nun für andere Zusammensetzungen, z. B. für $\frac{\sqrt[m]{R}}{\sqrt[n]{S}}$ rc. rc.

§. 47.

Man kann daher für jeden aus ganzen Funktionen von x, oder auch aus unendlichen nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden Reihen beliebig zusammengesetzten Ausdruck, so weit er bis jetzt für uns existirt (also wenn keine allgemeine Potenz y^z und kein allgemeiner Logarithme $\overset{z}{log}\, y$ vorkommt, deren Bedeutung im Kalkul zur Zeit in diesen Blättern noch nicht hat festgestellt werden können), so lange die Koefficienten der gegebenen unendlichen Reihen oder der ganzen Funktionen von x, noch ganz allgemein sind und noch keine bestimmten Ziffern-Werthe angenommen haben, allemal in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe umformen, welche ihm, im Sinne des §. 3., „gleich" ist, d. h. welche statt seiner überall wo „gerechnet" wird (§. 6.) unbedingt gesetzt werden kann, ohne daß man dabei befürchten müßte, dadurch den Gesetzen der Operationen zu widersprechen.

Es giebt also endliche Ausdrücke, welche in allgemeine unendliche Reihen umgeformt, oder wie man gewöhnlich sagt, in allgemeine unendliche Reihen entwickelt werden können. Daraus folgt umgekehrt, daß es allgemeine unendliche Reihen geben wird, welche einem endlichen Ausdruck „gleich" sind (§. 3.) d. h. für welche überall wo „gerechnet" wird, ein endlicher Ausdruck gesetzt werden kann, ohne daß man dabei zu befürchten hätte, dadurch mit den Gesetzen der Operationen in Widerspruch zu gerathen.

Dieser endliche Ausdruck, der für eine solche allgemeine Reihe gesetzt werden kann, wird gewöhnlich die Summe der allgemeinen Reihe genannt; und — ihn finden, heißt gewöhnlich „die Reihe summiren." — In den seltensten Fällen existirt eine solche Summe, allein man formt häufig auch eine unendliche Reihe in eine Zusammensetzung aus andern unendlichen Reihen um, und nennt dann erstere summirt, sobald letztere unendliche Reihen einer bequemen Behandlung unterliegen, und durch einfache Zeichen (z. B. a^x, e^x, *Sin* x, *Cos* x) bezeichnet worden sind.

Von der Summation einer unendlichen Reihe kann daher nur dann die Rede seyn, wenn sie noch allgemein gedacht ist, d. h. wenn sie nach Potenzen irgend eines Ausdrucks x fortschreitet, der noch allgemein d. h. noch ein bloßer Träger der Operationszeichen ist, unter welchem also noch kein bestimmter Ziffern-Werth gedacht wird.*)

§. 48.

Wird in einer nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden unendlichen Reihe dem x irgend ein bestimmter Ziffern-Werth gegeben, so erhält man einen aus unendlichen Gliedern bestehenden

*) Wir werden jetzt bald die Existenz von numerischen unendlichen Reihen nachweisen und dann zeigen, daß solche zwar keine Summe haben können, wie solche eben im Texte definirt ist, aber einen Werth, und daß man solche zwar nicht summiren, aber auswerthen kann.

Ausdruck (in welchem die Glieder entweder noch allgemein gedacht sind, oder bereits besondere Ziffern-Werthe haben), der nicht mehr die Form der ganzen Funktionen von x hat, mit dem also auch nicht mehr nach den Gesetzen der ganzen Funktionen von x „gerechnet" werden kann, der aber doch noch immer die Form einer algebraischen Summe von unendlich vielen Gliedern hat (deren Glieder übrigens bis in's Unendliche fort ein bestimmt ausgesprochenes Gesetz befolgen müssen, weil solche außerdem nicht bis in's Unendliche fort als gegeben angesehen werden könnten), so daß, um mit ihm zu rechnen, man die Gesetze der algebraischen Summen noch anwenden kann.

Sollen aber solche Reihen mit einander multiplicirt oder gar durch einander dividirt werden, so hat man in der Regel kein Gesetz, nach welchem die Glieder des Resultats geordnet werden können, d. h. man hat keine bestimmt vorgeschriebene Form, in welche das Resultat gebracht werden soll; und deshalb ist das „Rechnen" (nach §. 6.) mit solchen unendlichen Reihen etwas sehr Mißliches; und wenn ein Rechnen mit ihnen gelingt, d. h. zu einer gewünschten Anwendung führt, so hat man es in der Regel nur dem Umstande zuzuschreiben, daß man gerade so gerechnet hat, wie wenn die einzelnen Glieder der Reihen noch mit den fortschreitenden Potenzen eines Ausdrucks x, der in den Gliedern selbst noch nicht vorkommt, multiplicirt gewesen wären, also wie wenn es Reihen wären, die nach ganzen Potenzen von x fortlaufen.*)

Denkt man sich dagegen in einer solchen unendlichen Reihe, die nicht mehr nach ganzen Potenzen irgend eines Ausdrucks x fortläuft, die Glieder alle als bestimmte Ziffern-Werthe, d. h. als völlig bestimmte reelle oder imaginäre Zahlen von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$, so wird diese unendliche Reihe, im Gegensatze

*) So erklärt sich's auch, wenn zuweilen ein „Rechnen" mit divergenten numerischen Reihen, wie wir solches in Schriften der Mathematiker des verflossenen Jahrhunderts öfter vorfinden, nichts desto weniger zu einem richtigen Resultat geführt hat.

mit der allgemeinen, eine numerische Reihe genannt, und bei dieser muß man dann zwei Fälle wohl unterscheiden,

a) wenn das durch Addiren von n ihrer auf einander folgenden Glieder erhaltene Resultat, für $n=\infty$ (d. h. für n unendlich groß, d. h. im Falle statt n eine positive ganze Zahl gedacht wird, welche immer noch größer seyn soll als jede bereits noch so groß gedachte aber bestimmte Zahl) einen bestimmten reellen oder imaginären (Grenz-) Werth annimmt, von der Form $p+q\sqrt{-1}$;*) in diesem Falle heißt die (numerische) Reihe eine convergente (und man sagt, sie convergire) und die eben gedachte reelle oder imaginaire Zahl $p+q\sqrt{-1}$, die für $n=\infty$ aus der Addition der n ersten auf einander folgenden Glieder der Reihe hervorgegangen ist, wird dann der Werth der convergenten (numerischen) Reihe genannt;**)

b) wenn das Addiren von n Gliedern der Reihe einen Ausdruck zwar von der Form $P_n+Q_n\sqrt{-1}$ giebt, in solchem aber die Funktionen P_n, oder Q_n, oder beide, für $n=\infty$, selbst unendlich groß werden (d. h. positiv oder negativ, aber immer noch größer als jede noch so groß gedachte ganze oder gebrochene aber bestimmte Zahl); eine

---

*) Das Resultat der Addition von n solchen Gliedern hat nämlich die Form $P_n+Q_n\sqrt{-1}$, wo P_n und Q_n Funktionen von n sind, die für jede positive ganze Zahl n reelle Werthe annehmen, während aber auch $Q_n=0$ seyn kann. Nehmen nun P_n und Q_n für $n=\infty$ bestimmte reelle Werthe p und q an, so tritt der obige Fall ein. Die Zahlen p und q können aber oft bloß dadurch gegeben seyn, daß P_n oder Q_n für $n=\infty$ zwischen zwei Grenzen liegend gefunden wird, welche einander selbst so nahe rücken als man nur immer will, mit andern Worten: p und q können irrational seyn.

**) Was hier Werth genannt worden ist, wird von andern Schriftstellern auch häufig die Summe genannt. Hier aber unterscheiden wir genau Werth und Summe, und gebrauchen das Wort „Summe“ nur in dem Sinne, der im §. 47. diesem Worte beigelegt sich findet.

solche (numerische) Reihe wird divergent genannt (und man sagt sie divergire).

So lange also eine unendliche Reihe noch allgemein gedacht wird, so lange kann von einer Divergenz oder Convergenz derselben nicht die Rede seyn, eben weil nach dem Vorstehenden diese letzteren Begriffe nur erst bei numerischen Reihen (also auch wenn allgemeine Reihen ausdrücklich als numerische gedacht werden) eintreten.

Aus diesen Begriffen werden nun die wichtigsten Folgerungen gezogen, namentlich:

1) Die convergente numerische Reihe hat einen „Werth", der reell oder imaginär und von der Form $p+q\sqrt{-1}$ ist; dieser „Werth" kann immer für sie gesetzt werden, überall wo man „rechnet"; denn er ist ihr „gleich". Und in sofern sie diesen „Werth" immer wieder reproducirt und nichts als diesen Werth, so kann mit der numerischen und zugleich convergenten Reihe noch immer „gerechnet" werden.

2) Eine convergente Reihe hat aber diesen Werth nur vermöge des Gesetzes, nach welchem die Glieder derselben bis in's Unendliche fortgehen. Soll daher kein Zweifel über den wahren Werth einer convergenten Reihe entstehen, so muß man mit Sorgfalt das Gesetz angeben, nach welchem die Glieder der numerischen Reihe bis in's Unendliche fort genommen werden sollen.

Man kann sich z. B. aus denselben reciproken Gliedern der natürlichen Zahlen

$$1,\ -\tfrac{1}{2},\ +\tfrac{1}{3},\ -\tfrac{1}{4},\ +\tfrac{1}{5},\ -\tfrac{1}{6},\ +\tfrac{1}{7},\ -\text{in inf.}$$

mehrere, ja beliebig viele numerische unendliche Reihen zusammenstellen, welche alle konvergent sind, aber alle einen verschiedenen Werth haben, während jede für sich vermöge des bestimmten Gesetzes ihrer Bildung einen völlig bestimmten Werth hat.

Die Reihe

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\text{in inf.},$$

in welcher, wenn man 2n ihrer Glieder nimmt, allemal eben so viele positive als negative Glieder vorkommen, hat den Werth *log. nat.* 2.

Die Reihe

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{6}+\text{in inf.},$$

in welcher, wenn man 3n erste Glieder nimmt, 2n positive und nur n negative der obigen Glieder (in ihrer Ordnung) auf einander folgen, hat dagegen den Werth $\frac{3}{2}$ *log. nat.* 2.

Die Reihe

$$1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{7}-\text{in inf.},$$

in welcher unter 3n ersten Gliedern allemal n positive und 2n negative der obigen Glieder sich befinden, hat den Werth $\frac{1}{2}$ *log. nat.* 2.

Nimmt man aber von den oben verzeichneten Gliedern immer μ der positiven und dann ν der negativen, hierauf wieder μ der positiven Glieder, um sie wieder von ν der negativen Glieder folgen zu lassen, u. s. w. f.; so ist der Werth der numerischen und konvergenten Reihe

$= log.nat.2+\frac{1}{2} log.nat.\frac{\mu}{\nu}$, also dem Werthe *log.nat.*2 der erstern Reihe gleich, so oft $\mu=\nu$, aber größer als jener, wenn $\mu>\nu$, und kleiner als jener, wenn $\mu<\nu$ ist.

3) Eine divergente Reihe hat **keinen** Werth, den sie vorstellen könnte; also ist eine divergente (numerische) Reihe eine, im Kalkul unzuläßige Form, gerade so wie früher die Form $\frac{b}{0}$ als eine solche anerkannt werden mußte.

Wenn daher eine allgemeine Reihe in einem besondern Fall der Anwendung in eine numerische übergeht und diese divergent gefunden wird, so kann und darf augenblicklich nicht länger mit ihr gerechnet werden, und das Resultat, **ohne unrichtig** zu **seyn**, zeigt entschieden an, **daß für diese Ziffern-Werthe der Buchstaben die vorher geführte allgemeine Rechnung nicht mehr statt finde und daß für diesen Fall die Rechnung auf's Neue und besonders angestellt werden müsse.***)

4) Aus jeder numerischen Reihe R_1, sie mag convergent oder divergent seyn, kann man eine allgemeine Reihe wieder bilden, indem man den einzelnen Gliedern die verschiedenen Potenzen eines allgemeinen Ausdrucks x, als Faktoren anhängt. Wird die neue Reihe durch R_x bezeichnet, so geht die **numerische**

*) Unter den divergenten Reihen befinden sich auch solche, in denen dieselben Glieder periodisch bis in's Unendliche fort wiederkehren z. B. die Reihe

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+1-\text{in inf.}$$

Reihe R_1 aus der allgemeinen Reihe R_x hervor, wenn man in letzterer $x=1$ setzt.

Gesetzt nun die allgemeine Reihe R_x habe eine „Summe" (im Sinne des §. 47.), die durch S_x bezeichnet seyn kann, so daß man also

$$(\odot)\cdots \qquad R_x = S_x$$

hat, und diese Summe S_x nehme für $x=1$ einen bestimmten Ziffern-Werth an, der durch S_1 bezeichnet werden mag, so geht die Gleichung ($\odot$) für $x=1$ über in

$$(☾)\cdots \qquad R_1 = S_1.$$

Ist nun die Reihe R_1 convergent, so ist S_1 nothwendig ihr „Werth"; ist aber die Reihe R_1 divergent, so hat sie keinen Werth, und der, welcher gar nicht existirt, kann dann natürlich auch nicht dem Werthe S_1 gleich seyn wollen. Die Gleichung $R_1=S_1$ hört ganz auf für die Rechnung zu existiren, sobald die Reihe R_1 divergent ist; eben weil die Divergenz der Reihe allemal anzeigt (nach Nr. 3.), daß dasmal die allgemeine Rechnung eine Ausnahme erleide.

Dasselbe mag nun noch allgemeiner ausgesprochen werden. — Wenn eine allgemeine Reihe R_x im Allgemeinen die „Summe" S_x hat, so daß die Gleichung

$$\alpha) \qquad R_x = S_x$$

eine richtige ist (im Sinne des §. 3.); wenn dann dem x ein bestimmter Ziffern-Werth gegeben wird, und dadurch die Reihe R_x in eine numerische Reihe R übergeht, dagegen S_x in den Ziffern-Werth S, so ist die Gleichung

$$\beta) \qquad R = S$$

noch richtig, so oft R convergent ist, d. h. S ist dann der „Werth" der unendlichen und convergenten Reihe R; ist dagegen die numerische Reihe R divergent, so giebt die Gleichung β) nichts unrichtiges, sondern sie findet gar nicht mehr statt; sie hört auf zu existiren und wird in der Rechnung nicht weiter mehr beachtet.*)

---

*) Es ist dies gerade so wie z. B. mit der Gleichung $\frac{b}{a}\cdot a = b$. Sie

Und noch allgemeiner: Sind zwei Formen R_x und S_x, welche entweder beide endlich sind oder von denen die eine, unendliche Reihen enthält, oder welche beide unendliche Reihen enthalten, — einander gleich, — und bezeichnen R und S diejenigen in Ziffern ausgedrückten Formen, welche bezüglich aus R_x und S_x für irgend einen bestimmten Ziffern-Werth von x hervorgehen, so ist die Gleichung $R = S$ eine richtige, so oft R und S bestimmte (Ziffern-)„Werthe" haben; dagegen keine unrichtige, sondern eine in der Rechnung nicht mehr zulässige, so oft die eine oder die andere der Ziffern-Formen R und S, eine (numerische und) divergente unendliche Reihe enthält.

Da diese, aus den hiesigen Ansichten mit Nothwendigkeit hervorgehenden Lehren und Regeln von den Analysten hie und da übersehen und nicht beachtet werden, so daß dadurch irrige Resultate sich ergeben, so wollen wir diese zuletzt besprochenen Gegenstände noch durch einige Beispiele erläutern.

So hat z. B. die allgemeine Reihe

$$1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - \text{in inf.}$$

die „Summe" $\frac{1}{1+2x}$. So oft nun $x < \frac{1}{2}$ genommen wird, so oft convergirt diese Reihe und ihre Werth geht dann aus der Summe $\frac{1}{1+2x}$ für denselben Werth von x hervor, so so daß ihr Werth z. B. für $x = \frac{1}{3}$ nothwendig $= \frac{3}{5}$ wird. — Für jeden Werth von $x > \frac{1}{2}$ z. B. für $x = 1$ divergirt dagegen dieselbe unendliche Reihe, d. h. sie hat gar keinen Werth; und der, der gar nicht existirt, kann also auch nicht aus der allgemeinen Summe $\frac{1}{1+2x}$ für $x = 1$ hervorgehen. — Die Gleichung

$$1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - \text{in inf.} = \frac{1}{1+2x}$$

---

ist allemal richtig, so oft a ganz allgemein (d. h. ein bloßer Träger der Operationen ist); — wird aber dem a der Werth 0 (Null) gegeben, so wird sie nicht unrichtig, sondern sie hört ganz auf zu seyn, weil eine Form wie $\frac{b}{0}$ im Kalkul nicht zugelassen werden darf. Sie zeigt jedesmal eine Ausnahme an.

ist also eine vollkommen richtige Gleichung. Beide Formen links und rechts des Gleichheits-Zeichens haben die Eigenschaft, welche der Quotient rechts einzig und allein repräsentirt, nämlich mit $1+2x$ multiplicirt genau 1 zu geben. Beide allgemeinen Ausdrücke können daher unbedingt, überall wo „gerechnet" wird, für einander gesetzt werden. — In dem Falle nun, wo beide Ausdrücke links und rechts Ziffern-Werthe annehmen, haben diese beiden Werthe dieselbe Eigenschaft und sind daher ebenfalls einander „gleich". Natürlich aber kann von diesem letztern Umstand dann nicht mehr die Rede seyn, wenn einer der beiden Werthe gar nicht mehr vorhanden ist, d. h. wenn die Reihe divergirt.

Man kann den Quotienten $\frac{1}{1+x}$ oder $\frac{1}{x+1}$ auch in eine Reihe verwandeln, die nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortläuft. Man hat daher die allgemein richtigen Gleichungen

1) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{in inf.},$

2) $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \text{in inf.},$

3) $1 - x + x^2 - x^3 + \text{in inf.} =$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \text{in inf.}$$

Schafft man in dieser letztern Gleichung einige Glieder zur Rechten links herüber, oder einige Glieder zur Linken rechts herüber, so hat man immer noch die richtigen Gleichungen

4) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 - x + x^2 - x^3 + \text{in inf.}$

$$= \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^6} + \text{in inf.},$$

5) $-x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \text{in inf.} =$

$$= -x^2 + x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \text{in inf.}$$

Schreibt man in der Gleichung Nr. 4. die erstere Seite so:

$\frac{1}{x^2}(1-x+x^2-x^3+\cdots)$ und summirt man sie nach Nr. 1., so erhält man

$$6)\quad \frac{1}{x^2(1+x)}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^6}+\text{in inf.}$$

Schreibt man in der Gleichung Nr. 5. den Ausdruck zur Rechten so: $-x^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots\right)$, und summirt man ihn nach der Nr. 2., so erhält man

$$7)\quad -x^3+x^4-x^5+x^6-\text{in inf.}=-x^3\frac{1}{x+1}=-\frac{x^3}{1+x},$$

und diese letztern beiden Gleichungen sind wieder unbedingt richtig (nach §. 3.).

Setzt man aber nun statt x bestimmte Ziffern-Werthe, so daß die unendlichen Reihen nicht mehr allgemeine sind, sondern numerische werden, so hören die Gleichungen, ohne unrichtig zu werden, entweder zu existiren auf, oder sie gehen in richtige Ziffern-Gleichungen über.

Die Nr. 1. giebt nämlich links den Werth der numerischen und convergenten Reihe zur Rechten, so oft $x<1$; für $x>1$ hört aber die Gleichung Nr. 1. auf zu existiren, weil die Reihe rechts dann divergirt. — Für die Gleichung Nr. 2. gilt das erstere für $x>1$, das andere für $x<1$. — Die Gleichung Nr. 3., obgleich sie ganz und vollkommen richtig ist, und obgleich wir die ganz und vollkommen richtigen Gleichungen Nr. Nr. 4. 5. 6. und 7. aus ihr abgeleitet haben, hört allemal auf zu existiren, so oft statt x irgend ein Ziffern-Werth gesetzt wird, weil für alle Werthe von x, welche die eine Seite der Gleichung zu einer convergenten Reihe machen, die andere Seite der Gleichung allemal eine divergente Reihe wird. — Ganz dasselbe gilt für die Gleichungen Nr. Nr. 4. und 5.; sie existiren für keinen einzigen Ziffern-Werth von x. — Nichtsdestoweniger existirt aber wieder die aus der Nr. 4. abgeleitete und allgemein richtige Gleichung Nr. 6., für jeden Ziffern-Werth von x, welcher >1 ist, und sie hört bloß auf zu existiren, so oft $x<1$ ist. Aehnliches gilt

von der Gleichung Nr. 7., welche aus der, für keinen einzigen Ziffern-Werth von x existirenden Gleichung Nr. 5. hergeholt worden ist, welche eben so allgemein richtig ist, wie die übrigen alle, und welche wieder auch noch für jeden Ziffern-Werth von x existirt, der <1 ist, dagegen aufhört zu existiren, so oft $x>1$ genommen wird.

Betrachten wir nun zweitens ein Beispiel, in welchem eine Wurzel vorkommt. Soll z. B. die m^{te} Wurzel aus der Reihe

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\cdots, {}^{*)}$$

welche in der analytischen Trigonometrie unter dem Namen $Cos\,x$ vorkommt, gezogen werden, in dem Sinne, daß eine unendliche, wiederum nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe gefunden werden soll, welche der m^{ten} Wurzel aus vorstehender Reihe gleich ist, d. h. welche mit m potenzirt, die vorstehende Reihe wieder giebt; so findet man allemal eine nach geraden Potenzen von x fortlaufende Reihe R, so daß

$$R^m = Cos\,x$$

ist, unter $Cos\,x$ die allgemeine Reihe

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

verstanden. Diese Reihe R kann aber höchstens für alle Werthe von x convergent seyn, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen, weil für die (absolut) nächst größeren Werthe von x der Werth von $Cos\,x$ negativ, also wenn m gerade gedacht ist, jeder Werth von $\sqrt[m]{Cos\,x}$ imaginär wird, während die Reihe R lauter reelle Formen hat. Die Reihe R wird daher ganz gewiß für alle Werthe von x, welche (absolut) $>\frac{1}{2}\pi$ sind, divergent werden, also keinen Werth haben, und eben dadurch anzeigen, daß sie für diese Werthe von x nicht mehr geeignet ist, einen

---

*) Unter n! verstehen wir immer das Produkt $1\cdot2\cdot3\cdots\cdot n$ und allgemeiner noch die Faktorielle $1^{n|1}$, welche für $n=1$ in 1, und auch für $n=0$ in 1 übergeht.

Werth von $\sqrt[m]{Cos\,x}$ darzustellen. Man wird aber auch nun mit dieser numerischen und divergenten Reihe (die für einen absoluten Werth von x, $> \frac{1}{2}\pi$ sich ergeben hat) nicht weiter „rechnen", während das Rechnen im Allgemeinen, wo man sich gar noch nicht um den Werth von x bekümmert, allem Vorhergegangenen zu Folge, nothwendig richtige Resultate gewähren muß.

Ein noch einfacheres Beispiel hat man, wenn man $\sqrt{1-x^2}$ in eine unendliche Reihe verwandelt. Man erhält

$$\sqrt{1-x^2} = \pm\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \cdots\right).$$

Setzt man nun $x < 1$, so ist jede der beiden durch das vorstehende $\pm$ Zeichen ausgedrückten Reihen zur Rechten convergent, und ihr Werth ist dem einen Werthe von $\sqrt{1-x^2}$ gleich. Ist aber $x > 1$, so ist jede der beiden Reihen zur Rechten divergent, daher im Kalkul nicht mehr zulässig; sie hat nun keinen Werth, und der, der nicht existirt, kann also auch keinem der, nun imaginären Werthe von $\sqrt{1-x^2}$ gleich seyn. Die Reihe ist nun nicht geeignet den Werth von $\sqrt{1-x^2}$ auszudrücken.

Im Allgemeinen aber, wo von einem bestimmten Werthe von x nicht die Rede ist, wo also x ein bloßer Träger der Operations-Zeichen ist, bleibt die unendliche Reihe

$$\pm\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \cdots\right) \text{ der Wurzel}$$

$\sqrt{1-x^2}$ immer gleich, in sofern die Wurzel $\sqrt{1-x^2}$ (nach §. 41.) eine bloße Form ist, welche bloß die Eigenschaft (also jeden Ausdruck der diese Eigenschaft hat) repräsentirt, nämlich mit 2 potenzirt, allemal $1-x^2$ zu geben; und da die Reihe selbst, man mag das vorgesetzte + oder — Zeichen gelten lassen, diese Eigenschaft hat, so ist sie einer der Ausdrücke, welche durch die Wurzel $\sqrt{1-x^2}$ vorgestellt sind, und zu gleicher Zeit einer mit welchem, eben seiner Allgemeinheit wegen, noch „gerechnet" werden kann, d. h. also, welcher im Kalkul noch zulässig ist.

Um aber nun auch ein Beispiel zu geben, wie die Analysten hie und da die hier gegebenen Regeln vernachlässigen, nehmen wir als zunächst liegendes dasjenige, welches sich in La Croix's Traité du calcul différentiel et du calcul intégral T. III. 2. édit. pag. 621 seqq. aufgezeichnet findet. Es handelt sich nämlich dort um die „Summation" der unendlichen Reihe

$$(R) \vdots \cdots z^r + z_1 \cdot (z-2)^r + z_2 \cdot (z-4)^r + z_3 \cdot (z-6)^r + \cdots$$

unter der Voraussetzung, daß z_1, z_2, z_3, 2c. 2c. die auf einander folgenden Binomial-Koefficienten vorstellen, und daß r irgend eine positive ganze Zahl seyn soll.

Würde nun die Aufgabe nach den vorstehenden Regeln gelöst werden sollen, so würde man damit beginnen müssen, zu fragen, ob z ganz allgemein gedacht werden soll, als ein bloßer Träger der Operations-Zeichen, um dessen Bedeutung man sich gar nicht bekümmert, oder ob z irgend einen bestimmten Ziffern-Werth vorstellen soll, wenn solcher auch noch unbekannt ist.

Im erstern Fall müßte man nun wieder damit beginnen, daß man die Reihe in eine andere umformte, welche entweder nach ganzen Potenzen von z, oder doch nach ganzen Potenzen eines aus z zusammengesetzten Ausdrucks fortläuft, deren Koefficienten also nicht selbst noch z enthalten. Diese Reihe müßte man dann zu summiren suchen. — Man überzeugt sich aber bald, daß wenn man eine solche Reihe herstellen wollte, da r eine positive ganze Zahl seyn soll, die Koefficienten dieser Reihe mit den folgenden Gliedern wachsen, und zuletzt unendlich groß werden würden (der letzte, wenn man so sagen darf, würde eine divergente unendliche Reihe werden), und deshalb existirt die Reihe R in der gedachten allgemeinen Form gar nicht.

In dem andern Fall dagegen, wo man sich unter z einen bestimmten reellen Ziffern-Werth denkt, wenn selbiger auch noch völlig unbekannt, also unbestimmt gelassen ist, überzeugt man sich eben so leicht, daß die gegebene Reihe R, als numerische Reihe gedacht, allemal divergent ist.

Die Reihe R existirt also nicht, wenn sie in Bezug auf z als eine allgemeine (und r positiv ganz) gedacht wird; und,

als numerische Reihe gedacht, ist sie divergent d. h. hat sie keinen Werth. Sie läßt sich also durchaus nicht „summiren", man mag das Wort in dem strengern Sinne des §. 47. nehmen, oder man mag darunter die Bestimmung des „Werthes" einer numerischen (und convergenten) Reihe verstehen. Die Aufgabe ist also in keinem Falle zu lösen möglich.

Deflers sucht nun nichts desto weniger diese Aufgabe dadurch zu lösen, daß er an die einzelnen Glieder der Reihe R noch Potenzen von t anhängt, und die Reihe

$$(T_r) \cdots z^r + z_1 (z-2)^r \cdot t + z_2 (z-4)^r \cdot t^2 + z_3 (z-6)^r \cdot t^3 + \\ + z_4 (z-8)^r \cdot t^4 + \cdots$$

für $r = 0, 1, 2, 3$, 2c. 2c. summirt. Es drücke S_r diesen von ihm als Summe der Reihe T_r gefundenen Ausdruck aus; so hat man die Gleichung

$$T_r = S_r.$$

Diese Gleichung ist nun im Allgemeinen, d. h. so lange t unbestimmt bleibt, unbedingt richtig; und es kann, ohne daß man irgendwo Widersprüche zu befürchten hätte, überall S_r statt T_r und auch T_r statt S_r gesetzt werden. So wie aber statt t irgend ein bestimmter Ziffern-Werth gesetzt wird, also z. B. wenn $t=1$ genommen wird, wodurch die Reihe T_r in die oben gegebene Reihe R übergeht, so muß, ehe man den „Werth" oder die „Summe" dieser Reihe R aus der „Summe" S_r der Reihe T_r dadurch entnimmt, daß man in S_r ebenfalls $t=1$ setzt, vorher erst die Untersuchung angestellt werden, ob die Reihe R auch wirklich einen Werth habe, d. h. ob sie, als numerische Reihe gedacht, convergent sey; oder ob sie als allgemeine Reihe gedacht werden könne. Da nun, wie kurz vorher gezeigt worden, weder das eine noch das andere statt findet, so kann weder von dem „Werthe" noch von der „Summe" die Rede seyn.*) Also kann man auch die Summe der Reihe R

---

*) Man muß nämlich immer, so lange man mit Reihen rechnet, darauf sehen, entweder daß jede Reihe, mit der man rechnet, noch als eine allgemeine angesehen werden könne, oder, im Falle sie nicht als eine allgemeine,

nicht dadurch finden wollen, daß man in S_r ebenfalls $t=1$ setzt, wie Déflers gethan hat.

So erklärt sich, warum die Folgerungen, welche Déflers aus dieser Summation (a. a. O.) hat ziehen wollen, nothwendig falsch seyn mußten.

Denkt man sich aber unter z (in der Reihe R) eine positive ganze Zahl, so bricht die Reihe R ab, d. h. sie ist dann keine unendliche Reihe mehr, und nun erhält man den Werth dieses endlichen Ausdrucks R aus der oben gedachten Summe S_r ohne Weiteres, indem man $t=1$ setzt, wie sich nun von selbst versteht. Auf diese Weise findet man dann, daß allemal $R=0$ wird, so oft statt r eine ungerade Zahl gesetzt wird, daß aber für $r=2$ z. B. der Werth von R, $=z\cdot 2^z$ ist.

§. 48 b.

Fassen wir alles über die unendlichen Reihen bisher Gesagte zusammen, so ergeben sich für das Rechnen mit selbigen die praktischen Regeln:

1) Mit jeder unendlichen Reihe rechnet man unbedingt nach den Gesetzen der „algebraischen Summen" oder nach den Gesetzen der „ganzen Funktionen von x" so lange sie noch nach den Potenzen eines Ausdruckes x fortschreitet, (der einfach, oder selbst noch beliebig zusammengesetzt seyn kann, aber) der so allgemein gedacht ist, daß man ihn bloß als einen Träger der Operationen ansieht (als einen aggregirenden Bestandtheil der Form mit welcher gerechnet wird), ohne daß man sich im Geringsten um dessen Bedeutung bekümmert. Alle Resultate sind unbedingt richtig.

2) So wie aber Reihen, die in solchen allgemeinen Rechnungen vorkommen, für besondere numerische Werthe der Buchstaben in andere Reihen übergehen, welche nicht mehr als solche

---

nach Potenzen irgend eines Ausdrucks fortschreitende Reihe angesehen werden kann, daß sie konvergent sey. Also darf man mit der Reihe R nicht mehr rechnen.

angesehen werden können, die nach Potenzen eines allgemeinen x fortgehen, so darf man die Resultate der allgemeinen Rechnungen nur in dem Falle gelten lassen, wo die Reihen, als numerische Reihen gedacht, convergent sind; weil (numerische und) divergente Reihen als Formen erkannt worden sind, welche (eben so wie früher die Form $\frac{b}{0}$) im Kalkul gar nicht zugelassen werden dürfen, mit denen also nicht länger gerechnet werden darf.

Befolgt man diese Regeln bei dem Rechnen mit unendlichen Reihen sorgfältig genug, so wird man mit allgemeinen unendlichen Reihen wie mit endlichen Ausdrücken rechnen und dabei doch die Ueberzeugung haben können, daß man weder im Allgemeinen noch (was die Hauptsache ist) in irgend einem besonderen Falle der Anwendung zu Widersprüchen geführt werden könne.

Schluß-Anmerkung.

Man kann auch selbstständige allgemeine unendliche Reihen suchen, welche, ohne endlichen Ausdrücken gleich zu seyn, also ohne eine „Summe" im Sinne des §. 47. zu haben, doch gewisse Eigenschaften repräsentiren, d. h. die Träger gewisser Eigenschaften sind, also selbstständige Begriffe bilden. — Man wendet dazu die schon in den §§. 45. und 46. gebrauchte „Methode der unbestimmten Koefficienten" an; d. h. man nimmt die Form der Reihe an

$$\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 x^2 + \mathfrak{A}_3 x^3 + \mathfrak{A}_4 x^4 + \cdots,$$

und sucht die zur Zeit noch unbestimmt gelassenen Koefficienten $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ꝛc. ꝛc. dem vorgelegten Zwecke gemäß zu bestimmen.

Der Anfang des nächsten Kapitels wird uns ein solches Problem vor Augen legen, während der Verlauf desselben Ka-

pitels wenigstens in einem (aber großartigen) Beispiel sehen läßt, wie man auf diesem Wege ganz allgemeine Begriffe erhalten kann, welche frühere besondere Begriffe als besondere Fälle in sich schließen. Wir benützen in den nächsten Blättern dieses Mittel „zu neuen und allgemeinen Begriffen zu gelangen", deshalb bloß zur Erlangung eines allgemeinen Begriffes der Potenz, oder vielmehr zur Erlangung des Begriffes einer allgemeinen Potenz, weil das Beispiel ausreicht, um das Verfahren im Allgemeinen sehen zu lassen, und weil es uns vorzüglich um den Begriff der allgemeinen Potenz hier zunächst zu thun ist, um unsre Ansichten über die erste Abtheilung der mathematischen Analysis abschließen zu können.

Sechstes Kapitel.

§. 49.

Suchen wir nun eine unendliche Reihe, welche, wenn sie durch f_x bezeichnet wird, die Eigenschaft hat, daß (so wie man in den Elementen $a^x \cdot a^z = a^{x+z}$ hat, auch) $f_x \cdot f_z = f_{x+z}$ ist, unter der Voraussetzung, daß f_x, f_z und f_{x+z} Reihen vorstellen, welche dieselben Koefficienten haben, und die sich nur dadurch von einander unterscheiden, daß die eine nach Potenzen von x, die andere nach Potenzen von z, und die dritte nach Potenzen von $x+z$ fortschreitet.

Mittelst der Methode der unbestimmten Koefficienten findet man aber sogleich

$$f_x = 1 + cx + \frac{c^2}{2!}x^2 + \frac{c^3}{3!}x^3 + \frac{c^4}{4!}x^4 + \cdots,$$

in welcher Reihe der Koefficient c völlig unbestimmt, also allgemein bleibt.

Betrachten wir nun diese Reihe in dem einfachsten Fall, wo $c = 1$ ist, und bezeichnen wir sie in diesem Fall durch φ_x, so daß

$$1) \qquad \varphi_x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

wird, so ist also (eben weil φ_x ein besonderer Fall der Reihe f_x ist) auch

$$2) \qquad \varphi_x \cdot \varphi_z = \varphi_{x+z}$$

und, wenn man $x-z$ statt x setzt und durch φ_z dividirt,

$$3) \qquad \frac{\varphi_x}{\varphi_z} = \varphi_{x-z}.$$

Daraus folgt aber weiter, wenn m irgend eine positive oder negative ganze Zahl oder Null vorstellt, daß auch

4) $$(\varphi_x)^m = \varphi_{mx}$$

seyn werde. *)

Diese Gleichung Nr. 4. gilt aber auch noch, wenn m positiv oder negativ gebrochen ist, sobald wir nur (da wir andere gebrochene Potenzen noch nicht kennen) einen positiven Dignanden voraussetzen, wie der in der Note unten stehende Beweis zeigt. **)

Setzt man aber in dieser Gleichung Nr. 4. x=1, und dann ein reell gedachtes x statt m, so erhält man (da φ_1 offenbar positiv ist) die richtige Gleichung

5) $$(\varphi_1)^x = \varphi_x,$$

d. h.

$$\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

wenn nur x reell ist.

---

*) Aus Nr. 2. folgt nämlich:

$$\varphi_x \cdot \varphi_x = \varphi_{2x};\quad \varphi_{2x} \cdot \varphi_x = \varphi_{3x};\quad \varphi_{3x} \cdot \varphi_x = \varphi_{4x};$$

also, wenn m positiv ganz ist $(\varphi_x)^m = \varphi_{mx}$. Ist aber m negativ ganz, etwa $=-n$, so hat man wiederum $(\varphi_x)^m = (\varphi_x)^{-n} = \frac{1}{(\varphi_x)^n} = \frac{1}{\varphi_{nx}}$ $= \frac{\varphi_0}{\varphi_{nx}}$ (nach Nr. 3.) $= \varphi_{0-nx} = \varphi_{(-n)x} = \varphi_{mx}$.

**) Man setze in Nr. 4. $\frac{x}{\nu}$ statt x, und die positive ganze Zahl ν statt m, so ergiebt sich

$$(\varphi_{x:\nu})^\nu = \varphi_x,\ \text{also}\ \varphi_{x:\nu} = \sqrt[\nu]{(\varphi_x)},$$

wo φ_x positiv gedacht und die Wurzel die eindeutige positive ist. — Diese Gleichung potenzire man nun mit der positiven oder negativen ganzen Zahl μ, so findet sich, weil nach derselben Nr. 4.

$$(\varphi_{x:\nu})^\mu = \varphi_{\mu x:\nu}$$

wird, sogleich

$$\varphi_{\mu x:\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\varphi_x}\right)^\mu = (\varphi_x)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

wenn nur φ_x positiv gedacht ist, damit die Wurzel die eindeutige positive und die Potenz $(\varphi_x)^{\frac{\mu}{\nu}}$ die eindeutige reelle Potenz vorstellen, welche in den Elementen (§§. 26. und 28.) definirt und behandelt sind.

Bezeichnet man die positive Zahl φ_1 ein für allemal durch e, so schreibt sich diese Gleichung auch so

$$6)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

wenn nur x reell ist, so daß e^x in den Elementen (§. 28.) bereits eine Bedeutung erhalten hat. Dabei hat man

$$(\odot)\cdots\quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2{,}718\cdots.$$

Diese Gleichung Nr. 6. giebt uns nun die Gelegenheit, den Begriff der Potenz e^x auch auf imaginäre Werthe von x auszudehnen, indem wir von nun an unter e^x die unendliche Reihe $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ verstehen, in welcher x ein bloßer Träger der Operationszeichen ist, also eben so gut reell als auch imaginär seyn kann. Dann ist aber e^x von φ_x nicht mehr verschieden, und die Gleichungen Nr. Nr. 2. 3. und 4. schreiben sich nun auch so:

$$\text{I.}\quad e^x \cdot e^z = e^{x+z};$$

$$\text{II.}\quad \frac{e^x}{e^z} = e^{x-z};$$

und

$$\text{III.}\quad (e^x)^m = e^{mx},$$

wo x, z, eben so gut reell wie imaginär seyn können, während die letztere Gleichung für jedes positiv oder negativ ganze m und allgemeine x, oder für jedes reelle m aber positive e^x gilt. — Diese Potenz e^x heißt die natürliche, und es läßt sich leicht beweisen, daß sie für jeden reellen und selbst für jeden imaginären Werth von x von der Form $p + q \cdot i$, immer convergent ist, also immer einen reellen oder imaginären Werth von der Form $p + q \cdot i$ hat, und daß sie dabei nur eindeutig ist.

Ferner folgt noch

$$\text{IV.}\quad \sqrt[\nu]{(e^x)} = \sqrt[\nu]{1} \cdot e^{x:\nu};$$

in sofern (nach Nr. III.)

$$(e^{x:\nu})^\nu = e^{(x:\nu)\nu} = e^x$$

ist, wenn nur ν positiv ganz vorausgesetzt wird und $\sqrt[\nu]{1}$ jeden ihrer ν verschiedenen Werthe vorstellt, während x ganz allgemein gedacht ist.

Die Formeln Nr. Nr. I.—IV. sind also diejenigen, welche (unter den in Nr. Nr. III. und IV. hinzu getretenen Beschränkungen) für natürliche Potenzen in Anwendung gebracht werden können und dürfen.

§. 50.

An die natürliche Potenz schließt sich der natürliche Logarithme von selbst an, wenn man darunter das Zeichen *log* a versteht, welches jeden Ausdruck x bezeichnet der $e^x = a$, d. h. $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = a$ macht. — Diese Gleichung, aus welcher x gefunden werden muß, hat die Form der algebraischen höheren Gleichungen, aber vom unendlichen Grade, und dieser Umstand läßt die Vermuthung aufkommen, daß *log* a (nämlich x) unendlich viele Werthe haben werde, die aber alle von der Form $p + q \cdot i$ seyn müssen.

Stellt man sich also die Aufgabe: die Werthe von *log* a zu finden, unter der Voraussetzung, daß a reell oder imaginär aber von der Form $p + q \cdot i$ ist, d. h. will man alle Werthe von $log(p + q \cdot i)$ finden, — so kann man alle diese Werthe durch $\alpha + \beta \cdot i$ vorstellen, wo α und β reell gedacht und höchst wahrscheinlich unendlich vieldeutig sind, jedenfalls aber noch gesucht werden. Man hat dann die Gleichung

$$e^{\alpha + \beta \cdot i} = p + q \cdot i$$

oder

$$e^{\alpha} \cdot e^{\beta i} = p + q \cdot i.$$

Weil aber $e^{\beta i}$ aus e^x hervorgeht, wenn daselbst βi statt x gesetzt wird, so folgt, daß wenn man in der Reihe für $e^{\beta i}$, alle Glieder mit geraden Potenzen von β absondert und die Reihe

1) $$1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \cdots \text{ durch } K_\beta,$$

ferner alle ungeraden Potenzen von β zusammenfaßt und diese andere Reihe

2) $\beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \frac{\beta^7}{7!} + \cdots$ durch S_β

bezeichnet, dann

3) $$e^{\beta i} = K_\beta + i \cdot S_\beta$$

und

4) $$e^{-\beta i} = K_\beta - i \cdot S_\beta$$

wird.*) Dann zerfällt die obige Gleichung in

A) $e^\alpha \cdot K_\beta = p$ und B) $e^\alpha \cdot S_\beta = q$;

und es bleibt nun noch übrig, aus diesen beiden Gleichungen die unbekannten aber reell gedachten Werthe von α und β vollends zu finden.

Dazu ist eine nähere Kenntniß der beiden, durch K_β und S_β bezeichneten Reihen nöthig, und diese nähere Kenntniß wird analytische Trigonometrie genannt. Diese nähere Kenntniß muß man sich nun zuerst verschaffen, ehe man an die Fortsetzung der Lösung des vorgelegten Problems weiter denken darf.

§. 51.

Zuvörderst läßt sich leicht beweisen, daß die Reihen K_β und S_β für jeden reellen und imaginären Werth von β (von der Form $p + q \cdot i$) convergent sind, also immer einen Werh haben, und daß sie auch nur eindeutig sind.

Löst man die beiden Gleichungen §. 50. Nr. Nr. 3. und 4. nach K_β und S_β algebraisch auf, so erhält man

$$K_\beta = \frac{e^{\beta i} + e^{-\beta i}}{2} \quad \text{und} \quad S_\beta = \frac{e^{\beta i} - e^{-\beta i}}{2i},$$

so daß diese Reihen K_β und S_β als Potenz-Ausdrücke (gewöhnlich Exponential-Ausdrücke genannt) hergestellt sind, mit denen leichter „gerechnet" werden kann.

---

*) Für die Leser, welche hier vorausgesetzt sind, braucht nicht bemerkt zu werden, daß K_β und S_β die allgemeinen $Cos\,\beta$ und $Sin\,\beta$ sind, welche unabhängig von der Geometrie, hier bei Gelegenheit der natürlichen Potenz wie von selbst erscheinen. — Geometrie darf in der Analysis nicht vorausgesetzt werden, weil die mathematische Analysis nach den hiesigen Ansichten jeder Größenlehre vorausgehen muß.

Nimmt man aber irgend eine Gleichung zwischen Potenzen, z. B. $e^{(x\pm z)i} = e^{xi} \cdot e^{\pm zi}$;
und setzt man hier herein statt der Potenzen die aus K und S zusammengesetzten Ausdrücke (nach §. 50. Nr. Nr. 3. und 4.), so erhält man augenblicklich Gleichungen zwischen diesen Reihen K und S, und zwar die Gleichungen

I. $S_{x+z} = S_x \cdot K_z + K_x \cdot S_z$;

II. $K_{x+z} = K_x \cdot K_z - S_x \cdot S_z$;

III. $S_{x-z} = S_x \cdot K_z - K_x \cdot S_z$;

IV. $K_{x-z} = K_x \cdot K_z + S_x \cdot S_z$.

Multiplicirt man aber die Gleichungen §. 50. Nr. Nr. 3. und 4. mit einander, so findet man noch

V. $1 = (K_\beta)^2 + (S_\beta)^2$.

Dann folgt aber wieder (aus Nr. Nr. I. II. für $z = x$)

VI. $S_{2x} = 2S_x \cdot K_x$;

VII. $K_{2x} = (K_x)^2 - (S_x)^2 = 1 - 2(S_x)^2 = 2(K_x)^2 - 1$;

und (aus Nr. VII. noch für $x = \frac{1}{2}z$)

VIII. $S_{\frac{1}{2}z} = \sqrt{\dfrac{1-K_z}{2}}$;

IX. $K_{\frac{1}{2}z} = \sqrt{\dfrac{1+K_z}{2}}$.

Mittelst der Formeln Nr. Nr. I.—IV. lassen sich die drei Produkte $S_x \cdot K_z$, $K_x \cdot K_z$ und $S_x \cdot S_z$ in Summen und Differenzen, und auch umgekehrt die vier Summen oder Differenzen $S_\alpha \pm S_\beta$ und $K_\alpha \pm K_\beta$ wiederum in Produkte verwandeln.

§. 52.

Geht man nun auf die Ziffern-Werthe dieser allgemeinen durch K und S bezeichneten Reihen ein, so muß man vor allen Dingen bemerken, wie für reelle Werthe von x auch die Werthe von K_x und S_x allemal reell seyn und (wegen Nr. V.) zwischen $+1$ und -1 liegen müssen.

Ferner geben die Formeln Nr. Nr. I. und II., wenn man h statt z, und statt S_h, K_h die, durch diese Zeichen vorgestellten,

nach ganzen Potenzen von h fortlaufenden Reihen (aus §. 50. Nr. Nr. 1. und 2.) setzt:

$$\text{X.}\quad S_{x+h} = S_x + K_x h - S_x \frac{h^2}{2!} - K_x \frac{h^3}{3!} + S_x \frac{h^4}{4!} + \cdots;$$

$$\text{XI.}\quad K_{x+h} = K_x - S_x h - K_x \frac{h^2}{2!} + S_x \frac{h^3}{3!} + K_x \frac{h^4}{4!} - \cdots;$$

woraus hervorgeht:

a) Die reellen Werthe der Reihen S_x und K_x ändern sich stetig, mit den stetig sich ändernden reellen Werthen von x.

b) Die reellen Werthe der Reihe S_x wachsen mit den reellen Werthen von x zugleich, so lange K_x positiv ist, nehmen aber, während die Werthe von x von $-\infty$ an durch 0 hindurch bis zu $+\infty$ hin immer stetig wachsend gedacht werden, ab, sobald und so lange K_x negativ ist, — gehen ferner vom Wachsen zum Abnehmen über (d. h. sie haben einen größten Werth) in dem Augenblick, wo $K_x = 0$ und S_x positiv ist, — gehen endlich vom Abnehmen zum Wachsen über (d. h. sie haben einen kleinsten Werth) in dem Augenblick, wo $K_x = 0$ und S_x negativ ist.

c) Die reellen Werthe der andern Reihe K_x dagegen nehmen ab, während die reellen Werthe von x wachsen, so lange S_x positiv ist; sie wachsen mit den Werthen von x zugleich, sobald und so lange S_x negativ ist, und sie gehen vom $\left\{\begin{matrix}\text{Wachsen}\\ \text{Abnehmen}\end{matrix}\right\}$ zum $\left\{\begin{matrix}\text{Abnehmen}\\ \text{Wachsen}\end{matrix}\right\}$ über, in dem Augenblick, wo $S_x = 0$ und gleichzeitig K_x $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist.

§. 53.

Denkt man sich den Werth von S_x (oder K_x) gegeben, und den Werth von x dazu gesucht, so ist die Gleichung, welche x geben soll, jedesmal von der Form der höhern algebraischen Gleichungen, aber vom unendlichen Grade, und dies führt zur Vermuthung, daß es unendlich viele Werthe von x geben werde

von der Form $p+q \cdot i$, für welche S_x (oder K_x) einen und denselben Werth hat.

Dies alles deutet auf eine periodische Wiederkehr der Werthe von K_x und S_x. — In dieser Ansicht wird man aber bestärkt, wenn man die Gleichungen Nr. Nr. I. und II. des §. 51. näher betrachtet. Sie lassen nämlich sehen, daß die Werthe von S_{x+z} und S_z, desgleichen die Werthe K_{x+z} und K_z einander gleich sind, so oft der Unterschied x zwischen den Argumenten (Bogen) $x+z$ und z so ist, daß $K_x=1$ und $S_x=0$ wird. Alles kommt nun darauf an, diese letzteren Werthe von x zu finden.

§. 54.

Setzt man aber in §. 50. Nr. Nr. 1. und 2. $\beta=0$, so erhält man

1) $K_0=1$ und 2) $S_0=0$.

Während also x von 0 an stetig wächst, wird auch S_x von 0 an stetig mit wachsen (nach §. 52. b.), und gleichzeitig wird K_x von 1 an stetig abnehmen (nach §. 52. c.). Bezeichnen wir nun den kleinsten positiven Werth von x, für welchen K_x bis zu 0 hin abgenommen hat (also gleichzeitig S_x bis zu 1 hin gewachsen ist) und dessen Existenz leicht nachgewiesen werden kann,*) durch $\frac{1}{2}\pi$, d. h. das Doppelte dieser positiven Zahl durch π, so hat man danach

3) $K_{\frac{1}{2}\pi}=0$ und 4) $S_{\frac{1}{2}\pi}=1$.

Und nun leitet man mittelst der Gleichungen §. 52. Nr. Nr. VI. VII. (für $x=z=\frac{1}{2}\pi$ oder $x=z=\pi$), und §. 52. Nr. Nr. I. II. (für $x=\pi$, $z=\frac{1}{2}\pi$), sogleich noch ab

5) $K_\pi=-1$ und 6) $S_\pi=0$;

7) $K_{\frac{3}{2}\pi}=0$ und 8) $S_{\frac{3}{2}\pi}=-1$;

9) $K_{2\pi}=+1$ und 10) $S_{2\pi}=0$.

---

*) Man zeigt, daß für $x=1$, K_x noch positiv, daß für $x=2$ aber K_x bereits negativ wird, also liegt zwischen 1 und 2 ein Werth von x, für welchen $K_x=0$. Dieser Werth existirt also nicht bloß, sondern er kann sogar auch nach der Newton'schen Methode näherungsweise gefunden werden.

Aus §. 52. Nr. Nr. I.—IV. folgt dann weiter (für $x = \pi, 2\pi$)

11) $K_{\pi-z} = -K_z$; 12) $S_{\pi-z} = +S_z$;

13) $K_{\pi+z} = -K_z$; 14) $S_{\pi+z} = -S_z$;

15) $K_{2\pi-z} = +K_z$; 16) $S_{2\pi-z} = -S_z$.

Theilt man nun alle stetig neben einander liegenden positiven (ganzen oder gebrochenen, rationalen oder irrationalen) Zahlen in lauter gleiche Abtheilungen (von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, — von $\frac{1}{2}\pi$ bis π, — von π bis $\frac{3}{2}\pi$, — von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π, von 2π bis $\frac{5}{2}\pi$, u. s. w. fort) deren Grenzen immer um $\frac{1}{2}\pi$ größer werden, — nennt man den Inbegriff aller positiven Zahlen in einer solchen Abtheilung einen Quadranten, so sieht man vermöge der Formeln Nr. Nr. 1.—16. (indem man statt z alle Werthe im ersten Quadranten, d. h. von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gesetzt sich denkt) deutlich ein:

Daß innerhalb der 4 ersten Quadranten, während die reellen Werthe von x von 0 bis 2π stetig wachsend gedacht werden, — die Werthe der Reihen K_x und S_x so sind:

Quadranten:	Die Werthe der Reihe K_x:	Die Werthe der Reihe S_x:
im 1sten	positiv und abnehmend von 1 bis zu 0 hin;	positiv und wachsend von 0 bis zu 1 hin;
im 2ten	negativ und abnehmend von 0 bis zu −1 hin;	positiv und abnehmend von 1 bis zu 0 hin;
im 3ten	negativ und wachsend von −1 bis zu 0 hin;	negativ und abnehmend von 0 bis zu −1 hin;
im 4ten	positiv und wachsend von 0 bis zu 1 hin.	negativ und wachsend von −1 bis zu 0 hin.

Dann aber findet man aus §. 52. Nr. Nr. I. u. II. (für $x = 2\pi$, 4π, $6\pi, \cdots$ und $z = 2\pi$) leicht noch, wenn n eine positive ganze Zahl ist,

17) $K_{2n\pi} = 1$ und 18) $S_{2n\pi} = 0$;

so wie dann weiter (§. 53.)

19) $K_{2n\pi+y} = K_y$ und 20) $S_{2n\pi+y} = S_y$;

d. h. in je 4 der folgenden Quadranten kehren die Werthe der

Reihen K_x und S_x genau in derselben Ordnung wieder, wie in den 4 ersten Quadranten.

Endlich folgt sogleich aus §. 50. Nr. Nr. 1. und 2., daß

21) $K_{-x} = K_x$ und 22) $S_{-x} = -S_x$

ist, woraus hervorgeht, daß die Formeln Nr. Nr. 17.—20. gelten, es mag n positiv oder negativ ganz oder Null seyn.

§. 55.

Es erhellet nun deutlich:

a) die Werthe der Reihen K_x und S_x berechnen sich für alle positiven und negativen Werthe von x, nach den Formeln Nr. Nr. 11.—22. ohne Weiteres, so oft sie für alle positiven Werthe z von x, die im ersten Quadranten liegen, berechnet und tabellarisch niedergelegt sind;

b) die Werthe der Reihen K_x und S_x berechnen sich auch für alle imaginären Werthe von x, $= p + q \cdot i$, sobald man auch die Werthe von $K_{\beta i}$ und $S_{\beta i}$ d. h. die Werthe der Reihen (aus §. 50. Nr. Nr. 1. und 2.)

$$1 + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \frac{\beta^6}{6!} + \cdots \text{ oder } \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}$$

und

$$\beta + \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} + \frac{\beta^7}{7!} + \cdots \text{ oder } \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}$$

für alle positiven Werthe von β berechnet und tabellarisch niedergelegt hat, *) in sofern nach Nr. Nr. I. und II. des §. 52.

$$S_{p+q \cdot i} = S_p \cdot K_{qi} + K_p \cdot S_{qi}$$

und $$K_{p+q \cdot i} = K_p \cdot K_{qi} - S_p \cdot S_{qi}$$

ist.

§. 56.

Ist daher $K_x = \mu$ und $S_x = \nu$ gegeben, wo μ und ν beliebig reell oder imaginär seyn können, und findet man, daß wirklich $\mu^2 + \nu^2 = 1$ ist, so hat x unendlich viele Werthe, welche

*) Den Anfang einer solchen Tabelle besitzen wir, von Gudermann berechnet.

diesen beiden Gleichungen genügen; und wenn φ irgend einer derselben ist, reell oder imaginär, so sind diese Werthe alle durch $\pm 2n\pi + \varphi$ ausgedrückt, wo n sowohl Null als jede positive ganze Zahl vorstellt. — Sind μ und ν reell, so liegt ein einziger dieser Werthe von x innerhalb der 4 ersten Quadranten, und dieser kann dann der durch φ vorgestellte seyn. — Auch läßt sich leicht beweisen, daß es außer den durch $\pm 2n\pi + \varphi$ vorgestellten unendlich vielen Werthen von x, keinen weiteren mehr giebt, welcher beiden Gleichungen $K_x = \mu$ und $S_x = \nu$ gleichzeitig genügen könnte.

Ist K_x oder S_x allein gegeben, so hat x doppelt so viele Werthe, wie wenn K_x und S_x zugleich gegeben sind, weil zu $K_x = \mu$, eben sowohl $S_x = +\sqrt{1-\mu^2}$, als auch $S_x = -\sqrt{1-\mu^2}$ genommen werden kann; und umgekehrt.

§. 56b.

Nun aber läßt sich das (gemeine) Ziffern-Rechnen wieder etwas weiter ausbilden. — Der Zweck des (gemeinen) Ziffern-Rechnens ist nämlich kein anderer als: „jeden einfacheren oder „noch so zusammengesetzten Ausdruck, der ursprünglich numeri„schen Zahlen (§. 31.) sein Daseyn verdankt, in eine allge„mein-numerische Zahl (§. 39.) d. h. in eine reelle Zahl „(positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl oder Null) „oder in eine imaginäre Zahl von der Form $p + q \cdot \sqrt{-1}$, „wo p und q wiederum reell sind, umzuformen, und neben„bei auf Verlangen die reellen ganzen Zahlen oder die Zähler „und Nenner der reellen gebrochenen Zahlen in numerische „Zahlen des §. 31. d. h. in Summen, die nach Potenzen von „10 geordnet sind, auszudrücken, wenn man nicht vorzieht, die „Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln." — Und ein Ausdruck heißt „ausgerechnet" oder „berechnet", sobald er auf diese letztere reelle oder imaginäre Form $p + q \cdot \sqrt{-1}$ gebracht ist.

Weil aber in der Form $p + q \cdot \sqrt{-1}$ auch alle reellen

Zahlen stecken (in sofern q=0 seyn kann), so wird man diesen Zweck des (gemeinen) Ziffern-Rechnens ganz vollständig erreichen können, wenn man die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten zweier solchen allgemein-numerischen Ausdrücke, wie $\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}$ und $\gamma+\delta\cdot\sqrt{-1}$, abermals in einen solchen Ausdruck von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ umformen kann; wenn man ferner $\sqrt[m]{p+q\cdot\sqrt{-1}}$, $(p+q\cdot\sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\nu}}$, $log(p+q\cdot\sqrt{-1})$ und $(p+q\cdot\sqrt{-1})^{\alpha+\beta\cdot\sqrt{-1}}$ in einen Ausdruck von derselben Form $P+Q\cdot\sqrt{-1}$ umzuformen versteht. — Die 4 erstern dieser Aufgaben finden sich bereits im §. 39. vollständig gelöst; von der 5ten Aufgabe findet sich im §. 39. nur der besondere Fall, wo statt der mten Wurzel die Quadrat-Wurzel steht, behandelt. Die 4 letztern Aufgaben des (gemeinen) Ziffern-Rechnens müssen daher hier noch ihre Erledigung finden.

Wir lösen nun in dem nächsten Paragraphen vorläufig die 5te und 6te dieser Aufgaben; kommen dann im darauf folgenden §. 58. zu der Lösung der 7ten Aufgabe, die im §. 50. bereits vorgelegt worden ist, um zuletzt, nachdem es endlich gelungen seyn wird, den Begriff der allgemeinen Potenz festzustellen, auch die letzte der genannten Aufgaben lösen und dadurch erst das (gemeine) Ziffern-Rechnen zum gänzlichen Schluß bringen zu können.

§. 57.

Man stellt zu dem Ende, wenn μ positiv oder negativ ganz gedacht wird, ν dagegen bloß positiv ganz, die Formeln hin

$$\text{I.}\quad (K_\beta+i\cdot S_\beta)^\mu = K_{\mu\beta}+i\cdot S_{\mu\beta};$$

$$\text{II.}\quad \sqrt[\nu]{K_\beta+i\cdot S_\beta} = K_{(2n\pi+\beta):\nu}+i\cdot S_{(2n\pi+\beta):\nu},\text{*)}$$

---

*) Es ist nämlich (nach §. 50. Nr. 3.) $K_\beta+i\cdot S_\beta = e^{\beta i}$ und $(e^{\beta i})^\mu = e^{\mu\beta i} = K_{\mu\beta}+i\cdot S_{\mu\beta}$, so wie (nach §. 54. Nr. Nr. 19. und 20.)

wo statt n sowohl Null als auch jede positive und jede negative ganze Zahl gesetzt werden kann, während der Ausdruck zur Rechten in Nr. II. doch nicht mehr als die ν Werthe der Wurzel zur Linken liefert, in sofern die Werthe von $K_{(2n\pi+\beta):\nu}$ und $S_{(2n\pi+\beta):\nu}$, so oft n um ein Vielfaches von ν größer wird, genau dieselben bleiben (nach §. 54. Nr. Nr. 19. und 20.). Deshalb giebt man zur Rechten in Nr. II. dem n nur die ν Werthe 0, 1, 2, 3, ⋯ $\nu-1$, ja oft nur die Hälfte dieser positiven Werthe, dagegen noch die negativen Werthe —1, —2, —3, ꝛc. ꝛc. bis man die ν von einander verschiedenen Werthe der Wurzel zur Linken wirklich hat.

Wird nun in Nr. II. $\mu\beta$ statt β geschrieben, so erhält man noch

$$\text{III.} \quad \sqrt[\nu]{(K_\beta + i\cdot S_\beta)^\mu} = K_{(2n\pi+\mu\beta):\nu} + i\cdot S_{(2n\pi+\mu\beta):\nu},$$

während dagegen, wenn man die Nr. II. links und rechts mit μ potenzirt, aus Nr. I. noch

$$\text{IV.} \quad \left(\sqrt[\nu]{K_\beta + i\cdot S_\beta}\right)^\mu = K_{(2n\pi+\beta)\mu:\nu} + i\cdot S_{(2n\pi+\beta)\mu:\nu}$$

hervorgeht, wo überall statt n **höchstens** die ν Werthe 0, 1, 2, 3, ⋯ $\nu-1$, oder nur die Hälfte dieser positiven Werthe, dagegen noch die Werthe —1, —2, —3, ꝛc. ꝛc. gesetzt werden müssen. Es ist aber aus den Formeln Nr. Nr. III. und IV. wahrzunehmen, daß in Nr. III. zur Rechten allemal ν wirklich von einander **verschiedene** Werthe sich ergeben, daß aber die Anzahl der verschiedenen Werthe in Nr. IV. geringer wird, so oft μ und ν noch einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Da-

---

$K_\beta + i\cdot S_\beta = K_{2n\pi+\beta} + i\cdot S_{2n\pi+\beta} = e^{(2n\pi+\beta)i}$, also

$\sqrt[\nu]{(K_\beta + i\cdot S_\beta)} = \sqrt[\nu]{e^{(2n\pi+\beta)i}} =$ (nach §. 40. IV.) $e^{(2n\pi+\beta)i:\nu}\cdot\sqrt[\nu]{1} =$

$= \sqrt[\nu]{1} \times [K_{(2n\pi+\beta):\nu} + i\cdot S_{(2n\pi+\beta):\nu}]$. Weil aber der zweite Faktor zur Rechten schon ν verschiedene Werthe liefert, und das ganze Resultat zur Rechten nicht mehr als ν Werthe geben kann, so kann man statt $\sqrt[\nu]{1}$ den einzigen Werth 1 setzen. Dadurch ergiebt sich die Nr. II.

durch aber wird die Behauptung im §. 41. (bei Nr. 4.), daß nämlich $\sqrt[\nu]{(a^\mu)} = (\sqrt[\nu]{a})^\mu$ keine vollkommen richtige Gleichung im Sinne des §. 3. ist, erst allgemeiner erläutert.

Endlich drücken die Ausdrücke zur Rechten in diesen 4 Gleichungen Nr. Nr. I.—IV. genau alle Werthe der Ausdrücke zur Linken aus, nicht mehr und nicht weniger, so daß diese Gleichungen Nr. Nr. I.—IV. vollkommen richtige Gleichungen sind, im Sinne des §. 3.

Sind nun p und q beliebige reelle Zahlen, und soll $p + q \cdot i$ mit μ potenzirt, oder soll $\sqrt[\nu]{p + q \cdot i}$, oder soll die Wurzel $\sqrt[\nu]{(p + q \cdot i)^\mu}$, oder soll endlich die Potenz $(\sqrt[\nu]{p + q \cdot i})^\mu$ „ausgerechnet" d. h. soll der Werth dieser Ausdrücke auf die Form $P + Q \cdot i$ gebracht werden, so verfährt man wie folgt:

Man berechnet $r = +\sqrt{p^2 + q^2}$, und φ aus den Gleichungen $K_\varphi = \frac{p}{r}$ und $S_\varphi = \frac{q}{r}$, indem man den kleinsten positiven Werth von φ nimmt, so daß $p + q \cdot i = r \cdot (K_\varphi + i \cdot S_\varphi)$ wird, und man hat dann mit Hilfe der Nr. Nr. I.—IV.

1) $(p + q \cdot i)^\mu = r^\mu \cdot [K_{\mu\varphi} + i \cdot S_{\mu\varphi}]$;

2) $\sqrt[\nu]{p + q \cdot i} = \sqrt[\nu]{r} \times [K_{(2n\pi + \varphi):\nu} + i \cdot S_{(2n\pi + \varphi):\nu}]$;

3) $\sqrt[\nu]{(p + q \cdot i)^\mu} = \sqrt[\nu]{(r^\mu)} \times [K_{(2n\pi + \mu\varphi):\nu} + i \cdot S_{(2n\pi + \mu\varphi):\nu}]$;

4) $(\sqrt[\nu]{p + q \cdot i})^\mu = (\sqrt[\nu]{r})^\mu \cdot [K_{(2n\pi + \varphi)\mu:\nu} + i \cdot S_{(2n\pi + \varphi)\mu:\nu}]$,

wo r^μ, $\sqrt[\nu]{r}$ und $\sqrt[\nu]{(r^\mu)}$ die in den Elementen (§§. 25. 26. 28.) bereits festgestellten eindeutigen und positiven Potenzen und Wurzeln sind, während es ausreicht, dem n die ν Werthe 0, 1, 2, 3, 4, ⋯ $\nu - 1$ unterzulegen, oder auch dem n bloß die Hälfte dieser positiven, dagegen eben so viele negative Werthe —1, —2, —3, 2c. 2c. beizulegen.

§. 57b.

Unter den ν Werthen der $\sqrt[\nu]{p+q\cdot i}$ in Nr. 2. nennen wir aber den den einfachsten, in welchem $n=0$ genommen ist, d. h. der die Zahl π nicht in sich aufnimmt. Ist jedoch $p+q\cdot i$ reell und auch positiv (etwa $=a$), so ist der einfachste Werth der $\sqrt[\nu]{a}$ zu gleicher Zeit die positive oder absolute Wurzel des §. 26.*)

§. 58.

Und nun läßt sich auch die Aufgabe des §. 50. vollends lösen, d. h. es kann nun der (natürliche) Logarithme von $p+q\cdot i$ „ausgerechnet" werden. Man wurde dort, indem man

---

*) Will man aus Nr. 2. die ν Werthe von $\sqrt[\nu]{1}$ und von der $\sqrt[\nu]{-1}$ herausheben, so muß man $q=0$ und $p=+1$ oder $p=-1$ nehmen. Dann wird $r=+1$, $\sqrt[\nu]{r}=1$ und für $p=+1$ noch $\varphi=0$, für $p=-1$ dagegen $\varphi=\pi$; und man erhält

$$\sqrt[\nu]{1}= \quad K_{2n\pi:\nu}+i\cdot S_{2n\pi:\nu} \quad = e^{2n\pi i:\nu}$$

$$\sqrt[\nu]{-1}=K_{(2n+1)\pi:\nu}+i\cdot S_{(2n+1)\pi:\nu}=e^{(2n+1)\pi i:\nu},$$

indem man dem n nach und nach die ν Werthe 0, 1, 2, 3, $\cdots \nu-1$ beilegt oder auch nur die Hälfte dieser positiven Werthe, und statt der andern Hälfte lieber $n=-1, -2, -3$, 2c. 2c. nimmt.

Man kann diese Resultate auch direkt aus der Formel Nr. II. erhalten, wenn man daran denkt, daß $+1=K_{2n\pi}+i\cdot S_{2n\pi}$ und $-1=K_{(2n+1)\pi}+i\cdot S_{(2n+1)\pi}$ ist. Dann hat man nämlich direkt

$$\sqrt[\nu]{1}=\sqrt[\nu]{K_{2n\pi}+i\cdot S_{2n\pi}}=\sqrt[\nu]{(e^{2n\pi i})}=e^{(2n\pi:\nu)i}=K_{2n\pi:\nu}+i\cdot S_{2n\pi:\nu};$$

$$\sqrt[\nu]{-1}=\sqrt[\nu]{K_{(2n+1)\pi}+i\cdot S_{(2n+1)\pi}}=\sqrt[\nu]{\left[e^{(2n+1)\pi i}\right]}=e^{[(2n+1)\pi:\nu]i}$$
$$=K_{(2n+1)\pi:\nu}+i\cdot S_{(2n+1)\pi:\nu}.$$

Der einfachste Werth dieser Wurzeln (der, nach der obigen Definition, für $n=0$ sich ergiebt) ist daher 1 für $\sqrt[\nu]{1}$, und $K_{\pi:\nu}+i\cdot S_{\pi:\nu}$ für $\sqrt[\nu]{-1}$. Der letztere Werth ist aber nicht der, wenn ν ungerade ist, existirende reelle Werth -1, der sich für $(2n+1)=\nu$ ergiebt.

$$log(p+q\cdot i)=\alpha+\beta\cdot i,\text{ also } p+q\cdot i=e^{\alpha+\beta i}$$

setzte, zu den Gleichungen

$$\text{A)}\ e^{\alpha}\cdot K_{\beta}=p \quad \text{und} \quad \text{B)}\ e^{\alpha}\cdot S_{\beta}=q$$

geführt. Daraus findet man jetzt (indem quadirt und addirt wird)

$$\text{C)}\ e^{\alpha}=+\sqrt{p^2+q^2}=r,$$

so daß α als der im §. 29. definirte reelle Logarithme der positiven Zahl r für die positive Basis e sich zeigt, aber immer nur einen einzigen Werth hat, der durch Lr bezeichnet werden mag, so daß Lr den einzigen reellen Werth des natürlichen Logarithmen von r vorstellt (welcher negativ, Null oder positiv ist, je nachdem r selbst <1, $=1$, oder >1 gefunden wird).

Außerdem geben die beiden Gleichungen **A.** und **B.** noch

$$\text{D)}\ K_{\beta}=\frac{p}{r} \quad \text{und} \quad S_{\beta}=\frac{q}{r};$$

und zu diesen reellen Werthen von K_{β} und S_{β} finden sich alle Werthe von $\beta=\pm 2n\pi+\varphi$, wo φ zwischen 0 und 2π liegend gedacht wird, und den kleinsten positiven dieser Werthe bezeichnet. Also hat man

$$\text{I.}\qquad log(p+q\cdot i)=Lr+(2n\pi+\varphi)\cdot i,$$

wo n sowohl Null als auch jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt.

Anmerkung. Man übersehe dabei nicht, daß die Gleichungen **D.** voraussetzen, daß r nicht Null ist, d. h. daß nicht gleichzeitig $p=0$ und auch $q=0$ ist. Die gefundenen Werthe des natürlichen Logarithmen hören also auf im Kalkul zuläßig zu seyn, so oft der Logarithmand $=0$ ist.

Es ist also $log\,0$ eine im Kalkul eben so unzuläßige Form, wie $\frac{b}{0}$; und so oft man in den Anwendungen einer allgemeinen Rechnung auf $log\,0$ stößt, eben so oft muß die Rechnung sogleich aufhören und, was jetzt gilt, besonders noch untersucht werden.

§. 58[b].

Unter diesen unendlich vielen Werthen von $log(p+q\cdot i)$, die alle wirklich von einander verschieden, d. h. einander nicht gleich sind, und welche, mit seltenen Ausnahmen, immer imaginär seyn werden, wollen wir denjenigen den einfachsten nennen, der für $n=0$ sich ergiebt, der also die Zahl π nicht in sich aufnimmt. Ist aber $a=p+q\cdot i$ reell und positiv, ist also $q=0$, $p=a$, folglich auch $r=a$ und $\varphi=0$, so ist dieser einfachste der Werthe von $log\,a$ zugleich der reelle, den wir so eben durch $L\,a$ bezeichnet haben. Daher kann man auch im Allgemeinen, wenn a nicht gerade positiv, sondern auch negativ oder imaginär ist, den einfachsten Werth von $log\,a$ doch immer durch $L\,a$ bezeichnen, so daß dadurch die Bedeutung des Zeichens $L\,a$ verallgemeinert ist; und man hat dann:

II. $$L(p+q\cdot i)=Lr+\varphi\cdot i$$

und

III. $$log\,a=L\,a+2n\pi\cdot i,$$

wobei n sowohl die Null als auch jede positive und jede negative ganze Zahl bedeutet, während a eben so gut reell wie imaginär seyn kann.

Ist dagegen a reell und positiv, so hat man noch

1) $log\,a=L\,a+2n\pi\cdot i;$

2) $log(-a)=L\,a+(2n+1)\pi\cdot i=L(-a)+2n\pi\cdot i;$

3) $log\,1=2n\pi\cdot i;$

4) $log(-1)=(2n+1)\pi\cdot i=L(-1)+2n\pi\cdot i,$ *)

wo $L\,a$ den einfachsten Werth von $log\,a$ vorstellt, der aber dasmal, wo a positiv ist, zugleich der einzige reelle Werth des natürlichen Logarithmen von a ist, d. h. der schon in den Elementen (§. 29.) unter dem Titel des reellen betrachtete Lo-

*) Es ist nämlich (nach Nr. II.)

$$L(-a)=L\,a+\pi\cdot i$$

und $$L(-1)=L\,1+\pi\cdot i=\pi\cdot i.$$

garithme ist (der positiven Zahl a für die positive Basis e), während dann, wenn —a negativ ist, noch

$$L(-a) = La + \pi \cdot i$$

seyn wird.

§. 59.

Mit den (eindeutigen) einfachsten Werthen des natürlichen Logarithmen rechnet man nur nach den beiden Formeln

1) $$L(ab) = La + Lb;$$

2) $$L\left(\frac{a}{b}\right) = La - Lb,$$

wo a und b beliebig reell oder imaginär seyn können.

Was aber die übrigen der für reelle Logarithmen früher (§. 30.) hingestellten Formeln betrifft, so kann im Allgemeinen von $L(a^x) = x \cdot La$ deshalb noch nicht die Rede seyn, weil der Begriff von a^x, wenn a und x allgemein seyn sollen, noch nicht feststeht. — Die Gleichung $L\left(\sqrt[m]{a}\right) = \frac{La}{m}$ endlich ist nicht als eine, dem Begriff des §. 3. entsprechende Gleichung anzusehen, weil $\sqrt[m]{a}$, und daher auch $L\left(\sqrt[m]{a}\right)$ m Werthe haben, während der Ausdruck zur Rechten nur einen einzigen Werth vorstellt, so daß nicht unbedingt die eine Seite dieser Gleichung statt der andern gesetzt werden kann.

Setzen wir nämlich $a = p + q \cdot i$, $+\sqrt{p^2 + q^2} = r$, $\frac{p}{r} = K_\varphi$ und $\frac{q}{r} = S_\varphi$, und verstehen wir unter φ selbst den kleinsten positiven Werth von φ, so hat man nach §. 57. Nr. 2.

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{p + q \cdot i} = \sqrt[m]{r} \cdot (K_{2n\pi + \varphi) : m} + i \cdot S_{(2n\pi + \varphi) : m})$$

d. h. $$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{r} \cdot e^{\frac{2n\pi + \varphi}{m} \cdot i},$$

wo $\sqrt[m]{r}$ die eindeutige absolute Wurzel ist, während n Null und alle ganzen Zahlen bis $m - 1$ vorstellt. Also ist

a) $$L\left(\sqrt[m]{a}\right) = L\left(\sqrt[m]{r}\right) + \frac{2n\pi + \varphi}{m} \cdot i = \frac{Lr + (2n\pi + \varphi)i}{m},$$

weil $\sqrt[m]{r}$ positiv, $L\left(\sqrt[m]{r}\right)$ reell ist, und für reelle Logarithmen die Gleichung $L\left(\sqrt[m]{r}\right)=\frac{Lr}{m}$ bereits als eine richtige erkannt ist (§. 30.). — Auf der andern Seite ist dagegen, eben weil man $p+q\cdot i=r\cdot(K_\varphi+i\cdot S_\varphi)=r\cdot e^{\varphi i}$ hat,

$$La=L(p+q\cdot i)=Lr+\varphi\cdot i,$$

also

b) $$\frac{La}{m}=\frac{Lr+\varphi\cdot i}{m}.$$

Vergleicht man nun beide Resultate in a) und b) zur Rechten, so findet man, daß

3) $$L\left(\sqrt[m]{a}\right)=\frac{La}{m}$$

nur dann eine richtige Gleichung ist, wenn man statt $\sqrt[m]{a}$ ebenfalls ihren einfachsten Werth setzt, d. h. denjenigen Werth, in dessen imaginären Theil die Zahl π nicht erscheint (vgl. §. 57[b].). — Ist also a reell und positiv, so gilt die Gleichung Nr. 3., so oft unter $\sqrt[m]{a}$ der positive Werth dieser Wurzel verstanden wird, und dann fällt sie wieder mit der des §. 30. zusammen.

§. 60.

Was endlich die unendlich vieldeutigen natürlichen Logarithmen betrifft, so muß man mit ihnen eben so vorsichtig rechnen, wie solches bereits in den §§. 37. und 41. für die mehrdeutigen Wurzeln angegeben sich findet.

Die Formeln

1) $$log(ab)=log\,a+log\,b;\ ^{*)}$$

---

*) Danach ist $log(a^2)=log\,a+log\,a$; — dagegen darf man statt $log\,a+log\,a$ nicht $2\,log\,a$ schreiben (vrgl. §. 37. und §. 41.), weil $2\,log\,a$ weniger Werthe hat, als $log\,a+log\,a$, nämlich alle diejenigen Werthe der letztern Summe ($log\,a+log\,a$) nicht hat, in denen die Summanden als verschiedene Werthe vorstellend gedacht werden. — Namentlich findet man bei näherer Untersuchung, daß $log(a^2)$ alle Werthe von $2\,log\,a$ und auch alle Werthe von $2\,log(-a)$ in sich schließt. Wenn daher Bernoulli aus $log(a^2)=2\,log\,a$ und $log(-a)^2=2\,log(-a)$ gefolgert hat, daß

2) $$log\left(\frac{a}{b}\right) = log\,a - log\,b;$$

3) $$log\left(\sqrt[m]{a}\right) = \frac{log\,a}{m}$$

haben rechts und links gleich viel und genau dieselben Werthe, wenn nur $\sqrt[m]{a}$ als mdeutig angesehen wird; — diese Gleichungen sind also (nach §. 3.) unbedingt richtig, d. h. die beiden Ausdrücke links und rechts in jeder derselben können unbedingt für einander gesetzt werden.

Dagegen kann im Allgemeinen von $log(a^x) = x \cdot log\,a$ noch gar nicht die Rede seyn, weil a^x im Allgemeinen noch keine Bedeutung hat; und für den besonderen Fall, wo a allgemein, dagegen x eine positive oder negative ganze Zahl ist, hat $log(a^x)$ allemal viel mehr ($\pm$xmal so viel) Werthe als $x \cdot log\,a$, wie die nachstehende Untersuchung lehrt.

Ist nämlich $a = p + q \cdot i$ und haben r und φ die frühere Bedeutung, so daß φ innerhalb der 4 ersten Quadranten liegt, so hat man

α) $log(a^x) = log((p+q \cdot i)^x) = log(r^x \cdot e^{x\varphi \cdot i}) = x \cdot Lr + x\varphi \cdot i + 2n\pi \cdot i$,

wo n Null und jede positive und negative ganze Zahl vorstellt. Dagegen ist

β) $x \cdot log\,a = x \cdot log(p+q \cdot i) = x \cdot (Lr + (2n\pi + \varphi)i) = x \cdot Lr + x\varphi \cdot i + 2nx\pi.i.$

Vergleicht man α) und β) zur Rechten, so findet man, daß in α) $\pm$xmal so viele Werthe sind als in β). Dadurch ist zu gleicher Zeit die Behauptung in der Note (wo $x = 2$ ist) gerechtfertigt.

§. 61.

Da alle im §. 49. gesuchten und gefundenen unendlichen Reihen f_x, welche die Eigenschaft haben, daß $f_x \cdot f_y = f_{x+y}$ ist, durch e^{cx} ausgedrückt werden können, so muß die allgemeine Potenz a^x, nach der wir streben, in e^{cx} enthalten seyn. Da aber a^x für $x = 1$ in a übergeht, und e^{cx} für $x = 1$ bloß e^c wird, so wird man $e^c = a$, also entweder $c = log\,a$ oder $c = L\,a$

$log\,a = log(-a)$ sey, so sieht man hier den dabei gemachten Fehler offen vorliegen, und zwar ist dieser Fehler derselbe, wie wenn man aus $\sqrt{(a^2)} = +a$ und $\sqrt{(a^2)} = -a$ folgern wollte, daß auch $+a = -a$ sey.

nehmen müssen, wo *log* a unendlich viele Werthe hat, und *L* a den einfachsten dieser Werthe vorstellt (§. 58ᵇ.).

Wir können daher den Begriff der Potenz a^x (in welchem a und x beliebig reell oder imaginär sind, so daß wir allemal

$$a = p + q \cdot i \quad \text{und} \quad x = \alpha + \beta \cdot i$$

uns denken wollen) ganz allgemein als eine Form a^x hinstellen, welche die natürliche Potenz $e^{x \cdot log\, a}$ bezeichnet. Diese Potenz a^x nennen wir nun die allgemeine.

Nun hat aber *log* a d. h. *log*(p + q·i) unendlich viele Werthe, welche (wenn $+\sqrt{p^2 + q^2} = r$ gesetzt wird, wenn φ den kleinsten positiven Werth vorstellt, der aus den Gleichungen

$$K_\varphi = \frac{p}{r} \quad \text{und} \quad S_\varphi = \frac{q}{r}$$

hervorgeht, und wenn *L* r den reellen Logarithmen der positiven Zahl r für die positive Basis e bedeutet), durch

$$log\, a = L\, r + (2n\pi + \varphi) \cdot i$$

ausgedrückt sind, unter n die Null und jede (positive und negative) ganze Zahl verstanden; — also drückt die allgemeine Potenz a^x oder $e^{x \cdot log\, a}$ unendlich viele solcher unendlichen Reihen (d. h. solcher natürlichen Potenzen) aus. Wir sondern daher einen dieser Werthe, der dem einfachsten Werth des *log* a (§. 58ᵇ.) entspricht, der also kein π in sich aufnimmt, also den Werth $e^{x \cdot La}$ ab, bezeichnen ihn auch noch durch a^x, nennen ihn aber den einfachsten Werth der allgemeinen Potenz.

Das Zeichen a^x stellt also einmal alle unendlich-vielen Werthe vor, welche durch $e^{x \cdot log\, a}$ ausgedrückt sind, und heißt dann die allgemeine Potenz; ein andermal stellt aber dasselbe Zeichen a^x nur den einfachsten Werth $e^{x \cdot La}$ dieser allgemeinen Potenz a^x vor.

In allen den Fällen, wo aus dieser doppelten Bedeutung desselben Zeichens a^x Zweideutigkeit hervorgeht oder hervorgehen könnte, muß man natürlich dem Uebel (entweder mit Worten, oder durch besondere Unterscheidungs-Zeichen) entschieden begegnen.

§. 62.

Von den einfachsten Werthen der allgemeinen Potenz.

Betrachten wir aber die einfachsten Werthe der allgemeinen Potenz zuerst. — Nach der Definition kann man solche sogleich „ausrechnen“, d. h. auf die Form $P+Q\cdot i$ bringen; es ist nämlich, unter der Voraussetzung daß nur von dem einfachsten Werthe der Potenzen die Rede ist,

$$(\odot)\cdots\ a^x \text{ d. h. } (p+q\cdot i)^{\alpha+\beta\cdot i}=e^{(\alpha+\beta\cdot i)\cdot L(p+q\cdot i)}=e^{(\alpha+\beta\cdot i)\cdot(Lr+\varphi\cdot i)}$$
$$=e^{\alpha\cdot Lr-\beta\varphi}\cdot(K_{\beta\cdot Lr+\alpha\varphi}+i\cdot S_{\beta\cdot Lr+\alpha\varphi}),$$

wo $r=+\sqrt{p^2+q^2}$ und φ der kleinste positive Werth ist, der sich (für φ) aus den Gleichungen $K_\varphi=\frac{p}{r}$ und $S_\varphi=\frac{q}{r}$ ergiebt, während Lr den reellen Logarithmen von r vorstellt.

Ist aber $a=p+q\cdot i$ reell und positiv, so erhält man hieraus, weil $q=0$, $p=a$, $r=a$, $\varphi=0$ wird,

$$(☾)\cdots\qquad (+a)^{\alpha+\beta\cdot i}=e^{\alpha\cdot La}\cdot(K_{\beta\cdot La}+i\cdot S_{\beta\cdot La})$$
$$=a^\alpha\cdot(K_{\beta\cdot La}+i\cdot S_{\beta\cdot La}),$$

wo a^α reell ist; und diesen besonderen Fall des einfachsten Werthes der allgemeinen Potenz hat der Vfr. in seinen Lehrbüchern unter dem Namen der künstlichen Potenz betrachtet (in sofern ihr der künstliche Logarithme gegenüber steht).

Es fällt aber (aus $\odot$ und ☾) in die Augen:

1) Ist x reell und $=\frac{\mu}{\nu}$, und a positiv, so ist $\beta=0$, $\alpha=\frac{\mu}{\nu}$, $q=0$, $p=a$, $\varphi=0$, also (aus ☾)

$$a^{\frac{\mu}{\nu}}=e^{\frac{\mu}{\nu}\cdot La}=\sqrt[\nu]{(e^{\mu\cdot La})}=\sqrt[\nu]{(a^\mu)}$$

nach §. 49. Nr. 10.; d. h. der einfachste Werth der allgemeinen Potenz ist in diesem Falle, wo der Dignand positiv, der Exponent x aber reell ist, zu gleicher Zeit die reelle Potenz des §. 28.

2) Ist x positiv oder negativ ganz, oder Null, aber a allgemein $=p+q\cdot i$, so ist $\beta=0$, $\alpha=x$ positiv oder negativ ganz oder Null, und (aus $\odot$)

$$a^x = (p + q \cdot i)^x = r^x \cdot (K_{x\varphi} + i \cdot S_{x\varphi}),$$

wo (nach Nr. 1.) r^x die reelle, also hier die Differenz-Potenz (des §. 25.) vorstellt. Daher ist der einfachste Werth der allgemeinen Potenz a^x in diesem Falle zu gleicher Zeit die Differenz-Potenz des §. 25. (nach §. 57. Nr. 1.)

3) Ist $a = e$, aber $x = \alpha + \beta \cdot i$ beliebig reell oder imaginär, so ist $La = Le = 1$, und es fällt daher nun der einfachste Werth a^x oder $e^{x \cdot La}$ der allgemeinen Potenz auch mit der natürlichen Potenz e^x zusammen.

Der einfachste Werth der allgemeinen Potenz a^x enthält daher alle früher betrachteten Potenzen als besondere Fälle in sich; und deshalb ist die im §. 61. gegebene Definition verstattet.

Für diese einfachsten Werthe der allgemeinen Potenzen erweisen sich sogleich wieder die fünf Formeln oder Gesetze (aus $a^x = e^{x \cdot La}$; $a^z = e^{z \cdot La}$; u. s. w.), nämlich

1) $a^x \cdot a^z = a^{x+z}$; 2) $a^x : a^z = a^{x-z}$;

3) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$; 4) $a^x : b^x = (a:b)^x$;

und 5) $(a^x)^z = a^{xz}$;

so daß letztere zum „Rechnen" mit den einfachsten Werthen der allgemeinen Potenzen ohne Weiteres angewandt werden können, obgleich hier a, x, z, b eben so gut reell als imaginär gedacht sind.

Zu gleicher Zeit aber erhellet aus dem Begriff des einfachsten Werthes der allgemeinen Potenz, daß zwar

6) $L(a^x) = x \cdot La$

ist, wie allgemein auch a und x gedacht werden, reell oder imaginär, wenn nur, wie hier immer, L den einfachsten Werth des natürlichen Logarithmen vorstellt, — daß dagegen die Gleichung

$$log(a^x) = x \cdot log\, a,$$

wo *log* alle unendlich vielen Werthe des natürlichen Logarithmen bezeichnet, nur in einem sehr beschränkten Sinne zugelassen werden darf.

Denn es ist

α) $log(a^x) = L(a^x) + 2n\pi i = x \cdot La + 2n\pi \cdot i$;

dagegen ist

β) $$x \cdot log\, a = x \cdot L a + 2n'x\pi i.$$

Diese beiden Ausdrücke zur Rechten stimmen aber zwar in ihren reellen Gliedern vollkommen überein, dagegen nicht in ihren imaginären; und zwar selbst dann nicht, wenn x positiv oder negativ ganz ist, in sofern auch dann $x \cdot log\, a$ viel weniger Werthe hat als $log(a^x)$, so daß beide Ausdrücke $log(a^x)$ und $x \cdot log\, a$ nicht unbedingt für einander gesetzt werden dürfen.*) Daher sind (nach dem Begriff des §. 3.) $log(a^x)$ und $x \cdot log\, a$ im Allgemeinen einander nicht gleich.

Anmerkung. Nach Anmerkung zu §. 58. und nach Ansicht der vorstehenden Formel ⊙ ist in dem Begriff der allgemeinen Potenz der Fall ausgeschlossen, wo der Dignand $p + q \cdot i$ der Null gleich wird, d. h. wo $p = q = r = 0$ ist. — Denkt man sich aber $q = 0$ und p also auch r immer kleiner werdend, so wird Lr, obgleich immer negativ, an sich immer größer. Ist daher dann noch α positiv und $\beta = 0$, so wird der erste Faktor (in ⊙) der Null desto näher rücken, je kleiner p ist, und so wird also dann $0^\alpha = 0$ sich ausweisen, so lange nur α positiv ist, übrigens rational oder irrational.

§. 63.

Diesem einfachsten Werthe der allgemeinen Potenz liegt nun ein allgemeiner Logarithme gegenüber. Man verstehe nämlich unter dem letztern das Zeichen $\overset{c}{log}\, a$, in welchem c und a beliebig reell oder imaginär gedacht sind und welches jeden Ausdruck x bezeichnet, der den einfachsten Werth der allgemeinen Potenz $c^x = a$, d. h. $e^{x \cdot Lc} = a$ macht.

Aus dieser Definition folgt sogleich

$$\text{I.} \qquad \overset{c}{log}\, a = \frac{log\, a}{Lc} = \frac{La + 2n\pi \cdot i}{Lc},$$

wo der Zähler $log\, a$ alle unendlich vielen Werthe des natürlichen Logarithmen von a vorstellt, während La und Lc die ein-

*) Vgl. die Note zu §. 60. — Beachtet man übrigens die obige Wahrheit, so hat man abermals eine Quelle von Paradoxien des Kalkuls verstopft.

fachsten Werthe der natürlichen Logarithmen der Zahl a und der Basis c bedeuten (so daß z. B. Lc der reelle ist), so oft die Basis c reell und positiv gedacht wird. In diesem letztern Fall ist der allgemeine Logarithme derjenige, welcher in den Lehrbüchern des Vfrs. der künstliche genannt worden ist.

Will man den allgemeinen Logarithmen $\overset{p+q\cdot i}{log}(\gamma+\delta\cdot i)$ „ausrechnen" d. h. auf die Form $P+Q\cdot i$ bringen, so hat man

$$\text{II.}\quad \overset{p+q\cdot i}{log}(\gamma+\delta\cdot i)=\frac{log(\gamma+\delta\cdot i)}{L(p+q\cdot i)}=\frac{L\varrho+(2n\pi+\psi)\cdot i}{Lr+\varphi\cdot i}$$

$$=\frac{L\varrho\cdot Lr+(2n\pi+\psi)\varphi}{(Lr)^2+\varphi^2}+\frac{-\varphi\cdot L\varrho+(2n\pi+\psi)Lr}{(Lr)^2+\varphi^2}\cdot i,$$

wo $r=+\sqrt{p^2+q^2}$, $\varrho=+\sqrt{\gamma^2+\delta^2}$, wo ferner φ und ψ die kleinsten positiven Werthe sind, welche aus den Gleichungen

$$K_\varphi=\frac{p}{r},\quad S_\varphi=\frac{q}{r}\quad \text{und}\quad K_\psi=\frac{\gamma}{\varrho},\quad S_\psi=\frac{\delta}{\varrho}$$

hervorgehen, während n die Null und jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt.

Daraus folgt aber:

A) Der allgemeine Logarithme hat immer unendlich viele Werthe, die entweder alle imaginär sind, oder von denen doch nur ein einziger reell ist.

B) Wird die Basis $p+q\cdot i$ positiv und $=a$ gedacht, so ist $r=a$, $\varphi=0$, und man hat dann

$$\text{III.}\quad \overset{a}{log}(\gamma+\delta i)=\frac{L\varrho+(2n\pi+\psi)\cdot i}{La}=\frac{L\varrho}{La}+\frac{2n\pi+\psi}{\cdot La}\cdot i;$$

und dies sind daher alle Werthe des künstlichen Logarithmen von $\gamma+\delta\cdot i$. Dieselben sind alle imaginär, wenn $\gamma+\delta\cdot i$ imaginär oder negativ ist, dagegen ist ein reeller Werth $\left(=\frac{L\gamma}{La}\right)$ darunter, so oft $\gamma+\delta\cdot i=\gamma$ und positiv gedacht wird, und dieser reelle Werth allein wurde in der ältern Mathematik der künstliche Logarithme genannt.

C) Der allgemeine Logarithme ist allemal der natürliche, so oft die Basis $p+q\cdot i=e$ genommen wird (so daß $q=0$ und $p=e$ gedacht ist).

D) Sind γ, δ, p, q so gewählt, daß

$$Lr : L\varrho = \varphi : 2n\pi + \psi$$

ist, für irgend einen der Werthe von n, so hat der allgemeine Logarithme einer imaginären Zahl für eine imaginäre Basis allemal einen reellen Werth.*)

E) Für diese allgemeinen Logarithmen gelten die Formeln

1) $$\overset{c}{log}(ab) = \overset{c}{log}a + \overset{c}{log}b;$$

2) $$\overset{c}{log}\left(\frac{a}{b}\right) = \overset{c}{log}a - \overset{c}{log}b;$$

3) $$\overset{c}{log}\sqrt[m]{a} = \frac{\overset{c}{log}a}{m}$$

unbedingt, da sie rechts genau so viele Werthe enthalten und genau dieselben wie links, wie solches aus §. 60. in Verbindung mit der Nr. I. ohne Weiteres hervorgeht.

Dagegen gilt nicht allgemein die Gleichung

$$\overset{c}{log}(a^b) = b \cdot \overset{c}{log}a,$$

wie ebenfalls aus §. 60. hervorgeht. Man muß daher diese letztere Gleichung nie, oder doch nur mit der größten Vorsicht anwenden, da ihr nur in einem sehr beschränkten Sinne Gültigkeit zugestanden werden kann.

§. 63^b.

Hebt man wieder den einfachsten Werth $\frac{La}{Lc}$ des allgemeinen Logarithmen heraus und bezeichnet man solchen durch $L^c a$, so ist für diese eindeutigen Logarithmen unbedingt

*) Als das einfachste hierher gehörige Beispiel sey $\gamma = p$, $\delta = q$, so ist $\varrho = r$, $\psi = \varphi$; also ist die obige Bedingung (für $n = 0$) erfüllt, und man erhält (aus Nr. II.) $\overset{p+q\cdot i}{log}(p + q \cdot i) = 1$, was auch offenbar richtig ist. Eben so findet sich, wenn $\gamma = p^2 - q^2$ und $\delta = 2pq$ genommen wird, $\varrho = p^2 + q^2 = r^2$, und $\psi = 2\varphi$, so daß die Formel Nr. II. jetzt für $n = 0$

$$\overset{p+q\cdot i}{log}(p^2 - q^2 + 2pq \cdot i) = 2$$

ergiebt, was deshalb vollkommen richtig ist, weil in der That

$$(p + q \cdot i)^2 = p^2 - q^2 + 2pq \cdot i$$

wird.

1) $L^c(ab) = L^c a + L^c b$;

2) $L^c\left(\frac{a}{b}\right) = L^c a - L^c b$;

3) $L^c(a^b) = b \cdot L^c a$;

dagegen gilt

4) $L^c\left(\sqrt[b]{a}\right) = \frac{L^c a}{b}$

nur dann, wenn man unter $\sqrt[b]{a}$ nur den einfachsten ihrer Werthe versteht.*) (Vgl. 57^b.)

Anmerkung. Noch dürfen wir nicht unbemerkt lassen, daß der allgemeine Logarithme nach der Formel Nr. II. eine im Kalkul unzulässige Form annimmt, so oft $L r = 0$ und gleichzeitig $\varphi = 0$ ist, d. h. so oft $r^2 = p^2 + q^2 = 1$ und $\frac{p}{r} = 1$, $\frac{q}{r} = 0$, also $p = 1$, $q = 0$, d. h. so oft die Basis $= 1$ gedacht wird. — Und da $L r$ (nach Anmerkung zu §. 58.) im Kalkul unzulässig ist, so oft $r = 0$, also $p = q = 0$ ist, so folgt, daß Logarithmen im Kalkul unzulässige Formen sind

a) wenn die Logarithmanden 0 sind;

b) wenn die Basis 0 oder 1 ist.

So oft man daher in Anwendungen allgemeiner Rechnungen auf $\overset{b}{log}\,0$, oder $\overset{0}{log}\,b$, oder $\overset{1}{log}\,b$ stößt, eben so oft muß die Rechnung sogleich aufhören, und, was in diesem besonderen Falle gilt, noch besonders untersucht werden.

§. 64.

Von den unendlichvieldeutigen allgemeinen Potenzen.**)

Betrachten wir nun die unendlich vieldeutige allgemeine Potenz a^x oder $e^{x \cdot log\, a}$, von welcher die im §. 62. betrachtete

*) Sind a, b, c alle positiv, so sind dies zu gleicher Zeit die Formeln für die reellen Logarithmen, wie solche bereits im §. 30. mitgetheilt sich finden.

**) Dies ist diejenige Potenz, welche in den Lehrbüchern des Vfrs. schlechtweg die allgemeine Potenz genannt ist.

eindeutige allgemeine Potenz ihr einfachster Werth ist und welche auch unter dem Namen der „allgemeinen Potenz“ schlechthin verstanden werden muß. — „Rechnet man sie“ aus, für $a = p + q \cdot i$ und $x = \alpha + \beta \cdot i$, so erhält man

$$(\odot) \cdots (p + q \cdot i)^{\alpha + \beta \cdot i} =$$
$$= e^{\alpha \cdot Lr - (2n\pi + \phi)\beta} \times \left[K_{\beta \cdot Lr + \alpha(2n\pi + \phi)} + i \cdot S_{\beta \cdot Lr + \alpha(2n\pi + \phi)}\right],$$

wo n nach und nach Null und jede positive, auch jede negative ganze Zahl vorstellt.*)

Betrachtet man nun die unendlich vielen Werthe dieser allgemeinen Potenz a^x, zur Rechten in $\odot$, so findet man bald:

1) Sie sind alle einander gleich, so oft x positiv oder negativ ganz ist; und dieser einzige Werth fällt dann genau mit der im §. 24. und §. 25. definirten Differenz-Potenz zusammen.

2) Diese unendlich vielen Werthe reduciren sich auf ν von einander wirklich verschiedene Werthe, so oft $x = \frac{\mu}{\nu}$ und positiv oder negativ gebrochen, aber in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist; und dann fallen diese ν Werthe genau mit den ν Werthen von $\sqrt[\nu]{(a^\mu)}$ zusammen (nach §. 57.).

3) Endlich ist die Anzahl der verschiedenen Werthe von a^x wirklich unendlich groß, so oft x zwar reell aber irrational, oder wenn x entschieden imaginär gedacht wird.

4) Ist also in a^x, d. h. in $(p + q \cdot i)^{\alpha + \beta \cdot i}$, der Exponent x positiv oder negativ ganz oder Null, so ist der einfachste Werth der allgemeinen Potenz von der unendlich vieldeutigen allgemeinen Potenz, d. h. von der allgemeinen Potenz schlechthin, gar nicht verschieden, und beide fallen genau mit der Differenz-Potenz des §. 24. zusammen.

5) Ist aber der Exponent x positiv oder negativ gebrochen und $= \frac{\mu}{\nu}$, wo $\frac{\mu}{\nu}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ge-

---

*) Nach dem in der Anmerk. zu §. 62. Gesagten erhellet hinreichend, daß auch hier der Fall ausgeschlossen ist, wo der Dignand $= 0$ wird.

dacht wird, so unterscheidet sich der einfachste Werth der allgemeinen Potenz dadurch von der unendlich vieldeutigen allgemeinen, d. h. von der allgemeinen Potenz schlechthin, daß erstere nur einen und zwar den einfachsten (§. 57[b].) Werth, die letztere aber genau alle Werthe von $\sqrt[\nu]{a^\mu}$ ausdrückt.

Weil endlich die allgemeine Potenz schlechthin mehrdeutig ist, so muß mit ihr mit derselben Vorsicht „gerechnet" werden, die man bei dem Rechnen mit allen mehrdeutigen Ausdrücken anwenden muß, und welche wir in den §§. 37. und 41. bereits beschrieben, und auf welche wir im §. 60. wiederholt aufmerksam gemacht haben.

Sieht man e^x als den einfachsten Werth der allgemeinen Potenz an, so ist sie genau die natürliche. Sieht man aber e^x als allgemeine Potenz schlechthin an, so hat sie auch unendlich viele Werthe, von denen die natürliche Potenz nur einer und zwar ihr einfachster Werth ist.

Wir werden in der Folge jede Potenz, deren Dignand die Zahl e ist, als nur eindeutig ansehen, so daß sie die natürliche des §. 49. ist; wenn nicht etwa ausdrücklich das Gegentheil festgesetzt werden sollte.

Sieht man sich aber jetzt nach den Gesetzen um, nach denen man mit solchen (unendlich vieldeutigen) allgemeinen Potenzen „rechnen" kann, im Sinne des §. 6., so findet man folgende Resultate:

1) $$a^x \cdot a^z = a^{x+z} \cdot e^{2(mx+nz)\pi \cdot i};$$

2) $$a^x : a^z = a^{x-z} \cdot e^{2(mx+nz)\pi \cdot i}, \text{*)}$$

wo m und n von einander unabhängig eben sowohl Null als auch alle positiven und negativen ganzen Zahlen vorstellen;

---

*) In dem besonderen Falle, wo x und z reell sind, wird man in den Formeln Nr. Nr. 1. und 2. zur Rechten statt der Potenz $e^{2(mx+nz)\pi \cdot i}$ den ihm gleichen Ausdruck

$$K_{2(mx+nz)\pi} + i \cdot S_{2(mx+nz)\pi}$$

setzen müssen, wenn die Ausdrücke zur Rechten „ausgerechnet" werden sollen. Aehnliches gilt von dem Ausdruck zur Rechten in der Formel Nr. 5.

3) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$;

4) $a^x : b^x = (a:b)^x$;

und

5) $(a^x)^z = a^{xz} \cdot e^{2nz\pi i}$,

wo n Null und jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt.

Diese Gleichungen lassen sich aus der vorhergehenden Definition der (unendlich vieldeutigen) allgemeinen Potenz dann sich deutlich und leicht ableiten, wenn man sich noch merkt, daß nach ihr alle Werthe einer (unendlich vieldeutigen) allgemeinen Potenz erhalten werden, wenn man irgend einen einzigen bestimmten Werth derselben, mit allen Werthen von 1^x d. h. von $e^{x \cdot log 1}$ d. h. mit $e^{2nx\pi \cdot i}$ multiplicirt.

Hier bieten sich nun eine Menge der wichtigsten Folgerungen dar:

A) Die Gleichungen Nr. Nr. 3. und 4., die man gewöhnlich anwendet, enthalten links und rechts gleich viel und genau dieselben Werthe, geben daher in ihrer Anwendung jedesmal und nothwendig richtige Resultate, wie auch die Exponenten seyn mögen, reell oder imaginär.

B) Wendet man aber statt der vollständigen Formeln Nr. Nr. 1. und 2. die gewöhnlichen Formeln an, welche für die eindeutigen Potenzen volle Gültigkeit haben, nämlich die Formeln

$$a^x \cdot a^z = a^{x+z} \quad \text{und} \quad a^x : a^z = a^{x-z},$$

so läuft man Gefahr bei allgemeinen Rechnungen in große Irrthümer zu verfallen. Setzt man nämlich statt des Ausdrucks $a^x \cdot a^z$ den andern a^{x+z}, oder statt $a^x : a^z$ den andern a^{x-z}, so hat man die meisten Werthe der gegebenen Ausdrücke verloren, und nur diejenigen beibehalten, welche aus den Formeln Nr. Nr. 1. und 2. hervorgehen, wenn man $m = n = 0$ nimmt.

C) Ganz Analoges läßt sich von der Anwendung der Formel Nr. 5. sagen, wenn man nämlich in allgemeinen Rechnungen statt ihrer die gewöhnliche für die eindeutigen und also auch noch für reelle Potenzen geltende Formel

$$(a^x)^z = a^{xz}$$

anwendet, und statt $(a^x)^z$ bloß a^{xz} schreibt.

D) Umgekehrt: setzt man im Allgemeinen statt a^{x+z} das Produkt $a^x \cdot a^z$, oder statt a^{x-z} den Quotienten $a^x : a^z$, oder statt a^{xz} diese andere Potenz $(a^x)^z$, so hat man entweder genau dieselben Werthe gesetzt, die man hatte, oder doch Ausdrücke, welche zwar viel mehr (oft unendlich mehr) Werthe enthalten, als die Ausdrücke vorstellten, statt deren sie gesetzt worden sind, — unter denen sich aber doch die letzteren befinden; man verliert also dann wenigstens keinen der Werthe, die man hatte.

Da dies alles so höchst wichtig ist, weil, wenn man diese Wahrheiten vernachlässigt, ein allgemeines Rechnen mit Potenzen (oder ein Rechnen mit allgemeinen Potenzen schlechthin, was oft sich gar nicht vermeiden läßt) mit Sicherheit des Erfolges gar nicht mehr stattfinden kann, so wollen wir hier noch einige Beispiele hinzufügen.

Erstes Beispiel. Schreibt man z. B.

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{2}},$$

so hat $a^{\frac{2}{3}}$ drei, $a^{\frac{5}{6}}$ aber sechs Werthe, daher hat das Produkt $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}}$ achtzehn Werthe, von welchen sich jedoch je drei einander gleich finden, so daß sechs wirklich von einander verschiedene (d. h. einander nicht gleiche) Werthe übrig bleiben. Der Ausdruck zur Rechten $a^{\frac{3}{2}}$ hat dagegen nur zwei verschiedene Werthe, deren Anzahl nicht größer wird, wenn man auch statt $a^{\frac{3}{2}}$ etwa $a^{\frac{9}{6}}$ oder $a^{\frac{27}{18}}$ schreiben wollte. — Die obige Gleichung ist also im Sinne des §. 3. nicht richtig. — Schreibt man aber (nach Nr. 1.)

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{2}} \cdot e^{2\left(\frac{2}{3}m+\frac{5}{6}n\right)\pi \cdot i}$$

d. h.

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{2}} \cdot [K_{(4m+5n)\pi:3} + i \cdot S_{(4m+5n)\pi:3}],$$

oder, wenn man das Argument (den Bogen) um $2(m+n)\pi$ vermindert, und $-m$ statt m schreibt, da m, n eben so gut positiv wie negativ ganz sind,

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{2}} \cdot [K_{(2m-n)\pi:3} + i \cdot S_{(2m-n)\pi:3}],$$

oder, weil 2m—n Null und jede ganze positive oder negative Zahl μ in sich schließt,

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{2}} \cdot (K_{\mu\pi:3} + i \cdot S_{\mu\pi:3}),$$

so hat der Ausdruck zur Rechten auch nur sechs Werthe und genau dieselben wie der zur Linken; und die Gleichung ist jetzt eine vollkommen richtige.

Ein anderes Beispiel. Schreibt man

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a,$$

so hat man links zwei Werthe und rechts nur einen einzigen davon. Die Gleichung ist im Sinne des §. 3. nicht richtig. — Schreibt man aber (nach Nr. 1.)

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a \cdot e^{(m+n)\pi i} = a \cdot e^{\mu\pi i} = a \cdot (K_{\mu\pi} + i \cdot S_{\mu\pi}) = a \cdot K_{\mu\pi}$$
$$= a(\pm 1) = \pm a,$$

so hat man rechts genau dieselben zwei Werthe wie links, und die Gleichung ist nun eine vollkommene.

Drittes Beispiel. Zuweilen sind zufällig rechts eben so viele Werthe als links; schreibt man z. B.

$$a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{2}{9}} = a^{\frac{5}{6}+\frac{2}{9}} = a^{\frac{19}{18}},$$

so hat man links 54 Werthe, von denen aber je drei einander gleich sind, so daß sie sich auf 18 wirklich verschiedene Werthe zurückziehen, welche rechts ebenfalls alle 18 vorgestellt sind. In diesem Beispiele hat man also, ohne die verbesserte Formel Nr. 1. anzuwenden, zufällig bereits eine vollkommen richtige Gleichung. — Schreibt man aber nach Nr. 1.

$$a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{2}{9}} = a^{\frac{19}{18}} \cdot e^{2(\frac{5}{6}m + \frac{2}{9}n)\pi \cdot i}$$
$$= a^{\frac{19}{18}} \cdot [K_{2(15m+4n)\pi:18} + i \cdot S_{2(15m+4n)\pi:18}],$$

so hat man, da der zweite Faktor zur Rechten offenbar immer nur ein Werth von $\sqrt[18]{1}$ ist, rechts doch nicht mehr als dieselben 18 Werthe.

Viertes Beispiel. — Dieses Letztere tritt auch in dem Falle ein, wo die Gleichung

$$a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{19}{12}}$$

genommen wird, in so fern von den 24 Werthen, welche das Produkt zur Linken hat, je zwei einander gleich werden.

Fünftes Beispiel. Nimmt man

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = a^1 = a,$$

so hat man links neun Werthe, welche sich auf drei verschiedene zurückführen lassen, während rechts nur ein einziger Werth ist. Die Gleichung ist also in dem Sinne des §. 3. nicht richtig. — Schreibt man aber (nach Nr. 1.)

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a \cdot e^{\frac{2}{3}(m+2n)\pi \cdot i} = a \cdot [K_{2(m-n)\pi:3} + i \cdot S_{2(m-n)\pi:3}],$$

in sofern das Argument (der Bogen) um $2n\pi$ vermindert werden konnte, da die Werthe der Reihen K und S dadurch unverändert bleiben, so hat der Ausdruck rechts ebenfalls 3 Werthe und genau dieselben, die auch das Produkt zur Linken hat.

Sechstes Beispiel. Um nun noch ein Beispiel zu geben, welches auf die Formel Nr. 5. sich bezieht, nehmen wir

$$(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

Weil $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$ völlig gleichbedeutend ist mit $\sqrt[4]{(a^{\frac{2}{3}})^3}$ also mit $\sqrt[4]{(a^2)}$, so hat der Ausdruck zur Linken 4 Werthe, nämlich $+\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$, $+\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$ und $-\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$. Der Ausdruck $a^{\frac{1}{2}}$ zur Rechten dagegen hat nur zwei dieser 4 Werthe, und kann also nicht unbedingt statt $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$ gesetzt werden. Diese Gleichung ist daher im Sinne des §. 3. nicht richtig. — Nimmt man aber die Formel Nr. 5., so erhält man

$$(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{3}{2}n\pi \cdot i} = a^{\frac{1}{2}} \cdot (K_{\frac{3}{2}n\pi} + i \cdot S_{\frac{3}{2}n\pi});$$

und in diesem Resultat zur Rechten hat der zweite Faktor, für $n=0, 1, 2, 3,$ 2c. 2c. die 4 Werthe $1, -i, -1$ und $+i$, und multiplicirt man solche mit den 2 Werthen von $a^{\frac{1}{2}}$ d. h. mit $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$, so erhält man 8 Werthe, die sich auf 4 von einander wirklich verschiedene Werthe zurückziehen, und letztere sind nun genau die 4 Werthe, welche auch der Ausdruck zur Linken hat.

Man sieht also, wie im **Allgemeinen** die Gleichung $(a^x)^z = a^{xz}$ **nicht** angewendet werden darf, sondern die Gleichung Nr. 5. an ihre Stelle treten muß.

§. 65.

Es lassen sich aber auch noch leicht folgende specielle Sätze nachweisen, nämlich:

Sind $\frac{m}{n}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ zwei in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückte Brüche, und nimmt man

$$1) \qquad a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{m\nu+n\mu}{n\nu}},$$

$$2) \qquad a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{m\nu-n\mu}{n\nu}},$$

so hat in jeder dieser beiden Gleichungen der Ausdruck zur Linken allemal dieselben und nicht mehr als die $n\nu$ Werthe, die der Ausdruck zur Rechten hat, so oft n und ν relative Primzahlen sind d. h. keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben; und die Gleichungen bedürfen dann der in den Formeln §. 64. Nr. Nr. 1. und 2. ausgesprochenen Verbesserung nicht. — Haben dagegen n und ν einen gemeinschaftlichen Theiler τ, so hat der Ausdruck rechts nur $\frac{n\nu}{\tau}$ verschiedene Werthe, und es müssen dann statt der vorstehenden Nr. Nr. 1. und 2. die Formeln Nr. Nr. 1. und 2. des §. 64. wieder eintreten, wenn man allgemeingültige und vollständige Gleichungen*) haben will.

Desgleichen ist aber auch die Gleichung

$$3) \qquad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{m\mu}{n\nu}}$$

eine vollkommen richtige und bedarf der in §. 64. Nr. 5. aus-

---

*) Man wird sich hier unseres Begriffes der „Gleichung" erinnern müssen, nach welchem zwei **Formen** (Ausdrücke) einander gleich sind, wenn man beide unbedingt für einander setzen kann, mit dem Bewußtseyn, man könne dadurch, daß man dies thut, mit den Gesetzen der Operationen auf keine Weise in Widerspruch gerathen.

gesprochenen Verbesserung nicht, in allen den besonderen Fällen, in denen $\frac{m}{n}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, und zu gleicher Zeit m und ν, desgleichen n und μ keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben.

§. 66.

Von den allgemeinsten Logarithmen.

Der allgemeinste Logarithme $\overset{a}{log}\,b$ oder $b?a$ stellt alle Ausdrücke x vor, für welche die unendlich vieldeutige allgemeine Potenz a^x d. h. $e^{x \cdot log\, a} = b$ wird.

Daher ist

$$\overset{a}{log}\,b \text{ oder } b?a = \frac{log\,b}{log\,a}$$

oder

$$b?a = \frac{Lb + 2n\pi i}{La + 2\nu\pi i},$$

wo n und ν von einander unabhängig Null und alle positiven so wie alle negativen ganzen Zahlen vorstellen; und es hat daher der allgemeinste Logarithme unendlich Mal unendlich viele Werthe, unter denen die des allgemeinen Logarithmen des §. 63. mit begriffen sind.

Da es in dieser Schrift nur darauf ankommt, die Begriffe festzustellen und in dem Ganzen der mathematischen Analysis den innern festen Zusammenhang, diese wissenschaftliche Einheit nachzuweisen, so wollen wir uns hier auf die weitere Untersuchung dieser allgemeinsten Logarithmen um so weniger einlassen, als dieselbe einerseits leicht und andrerseits nicht sehr fruchtbringend ist.

§. 67.

Suchen wir schließlich noch eine unendliche Reihe

$$R = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots,$$

die nach ganzen Potenzen von x fortläuft, und welche dem $log(1+x)$ in dem Sinne gleich ist, daß $e^R = 1 + x$ werden soll, so kann man diese Aufgabe mittelst der Methode der un-

bestimmten Koefficienten direkter und weniger direkt ausführen, d. h. man kann entweder direkt

$$e^a \cdot e^{bx} \cdot e^{cx^2} \cdot e^{dx^3} \cdots = 1 + x$$

d. h.

$$e^a \cdot \left(1 + bx + \frac{b^2x^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + cx^2 + \frac{c^2x^4}{2!} + \cdots\right)$$
$$\left(1 + dx^3 + \frac{d^2x^6}{2!} + \cdots\right) = 1 + x$$

setzen, oder man kann die Reihen R_x alle suchen, welche mit $log(1+x)$ die Eigenschaft gemein haben, daß

$$R_x + R_z = R_{x+z+xz} \quad \text{oder} \quad 2R_x = R_{2x+x^2}$$

ist.*) — Im erstern Falle erhält man $e^a = 1$, also $a = log\,1$, d. h. $a = 2n\pi \cdot i$, und außerdem $b = 1$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{3}$, $e = -\frac{1}{4}$, ꝛc. ꝛc.

Im andern Falle bekommt man $a = 0$, der Koefficient b bleibt unbestimmt, und man findet die Reihe

$$b(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots),$$

welche, der in diesem Falle gemachten Forderung gemäß, die Eigenschaft eines der Werthe eines jeden Logarithmen hat, nicht bloß des natürlichen. — Für den natürlichen Logarithmen wird der Modul b der Einheit gleich, so daß man (weil, wenn $log(1+x)$ einen der Werthe vorstellt, dann $log(1+x) + 2n\pi \cdot i$ alle unendlich vieldeutigen Werthe des $log(1+x)$ ausdrückt) auf diesem Wege genau dasselbe Resultat erhält, wie auf dem erstern und direktern Wege.

Man könnte auch noch folgende Herleitung versuchen: man nimmt nämlich den binomischen Lehrsatz zu Hilfe, der im §. 42. für einen positiven ganzen Exponenten z entwickelt steht, und man hat, wie im §. 42. gezeigt ist:

$$\text{a)} \cdots \quad (1+x)^z = 1 + z \cdot x + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots$$
$$= 1 + (x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots)z + (\cdots)z^2 + \cdots.$$

*) Es ist nämlich

$$log(1+x) + log(1+z) = log[(1+x)(1+z)] = log[1 + (x + z + xz)]$$

und, wenigstens bedingt,

$$2log(1+x) = log[(1+x)^2] = log[1 + (2x + x^2)].$$

Auf der andern Seite hat man aber auch (nach §. 49.)

$$b)\cdots (1+x)^z = 1+[log(1+x)]\cdot z+\frac{[log(1+x)]^2}{2!}\cdot z^2+\cdots.$$

Vergleicht man nun diese Reihen in a) und b) zur Rechten mit einander,*) so erhält man augenblicklich

$$(\text{☾})\cdots\ log(1+x) = x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\cdots,$$

so wie überhaupt aus der Formel b)

$$log(1+x) = \frac{(1+x)^z-1}{z} \text{ für } z=0 \text{ genommen,}$$

gefunden wird. Bei dieser letztern Herleitung darf man aber nicht übersehen:

1) daß im §. 42. unter z eine ganze positive Zahl gedacht werden mußte, so daß die hiesige Vergleichung nicht nothwendig allgemein gültige Resultate gewährt, weshalb jede der beiden

---

*) Diese Vergleichung ist aber nicht erlaubt, weil nicht beide Gleichungen für jedes unbestimmt gelassene z gelten. Das Resultat (☾) der Vergleichung braucht daher gar nicht, oder doch nicht allgemein gültig zu seyn; und in der That ist dies so; denn in (☾) hat man links unendlich viele Werthe, rechts aber nur eine einzige unendliche Reihe, welche die Eigenschaft des Logarithmen von 1+x hat.

Hätte man dagegen schon den allgemein wahren binomischen Lehrsatz gehabt, wie solcher hier erst im nächstfolgenden §. 68. allgemein hingestellt und erwiesen wird, so würde die Reihe in a) zur Rechten noch den Faktor 1^z d. h. $e^{2nz\pi\cdot i}$ d. h. $1+2n\pi i\cdot z-2n^2\pi^2\cdot z^2+\cdots$ haben; und wenn man nun die Multiplikation der beiden Reihen, die beide nach z fortschreiten (nämlich der hier vorstehenden und der in a) zur Rechten), ausführt, so erhält man in der neuen (nach z geordneten) Reihe, für $(1+x)^z$, zum Koefficienten von z die Reihe

$$2n\pi\cdot i+x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\cdots.$$

Wenn man daher iezt die Resultate in a) und b) zur Rechten mit einander vergleicht, so erhält man die allgemein richtige Gleichung

$$log(1+x) = 2n\pi\cdot i+x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\cdots,$$

die für jedes unbestimmt gelassene x gilt, welches als ein bloßer Träger der Operationszeichen angesehen wird, die aber auch für jedes reelle oder imaginäre x wahr bleibt, für welches die Reihe convergent ist; und für jedes andere reelle oder imaginäre x (nicht unwahr, sondern) bloß im Kalkul unzulässig wird.

andern vorbeschriebenen Methoden (die Reihe für $log(1+x)$ zu finden) für den Augenblick vorzuziehen ist; *)

2) daß die unendliche Reihe zur Rechten in (C) mit $log(1+x)$ nur die Eigenschaft gemein hat, daß, im Falle man sie durch R bezeichnet, die Potenz e^R ohne Ende fort außer den beiden ersten Gliedern $1+x$, nur noch lauter Null-Glieder giebt;

3) daß dies derselbe Fall ist, wenn man die Reihe R durch Hinzufügung ihres allerersten Gliedes $2n\pi \cdot i$ vervollständigt, so daß man

I. $log(1+b) = 2n\pi \cdot i + b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \cdots$

erhält.

Außerdem muß für jede statt des $log(1+x)$ gefundene unendliche Reihe R noch bemerkt werden:

Wird in den besonderen Fällen, wo dem x besondere Ziffern-Werthe beigelegt sind, die Reihe R divergent, so hat sie keinen Werth und sie ist im Kalkul nicht mehr zuläßig; wird sie aber convergent, so hat sie einen Werth, der dieselbe Eigenschaft hat, wie $log(1+x)$, der also wirklich allemal einer der unendlich vielen Werthe von $log(1+x)$ seyn muß, wenn nicht durch Hinzufügung des allerersten Gliedes $2n\pi \cdot i$ dieser eine Werth bereits zu allen Werthen ergänzt worden ist.

Mag nun diese logarithmische Reihe im Besonderen divergent oder convergent seyn, so kann man doch, so lange statt x kein Ziffern-Werth gesetzt wird, so lange sie also noch allgemein ist, d. h. so lange x in ihr als ein bloßer Träger der Operationen angesehen wird, mit ihr eben so sicher „rechnen", wie mit $log(1+x)$ selbst, obgleich der letztere für jeden reellen oder imaginären Werth von x selbst einen Werth hat, die Reihe aber nur dann, wenn sie convergent ist. So wie aber eine der entstandenen Reihen für gegebene Ziffern-Werthe numerisch und

*) Diese Entwickelung hat übrigens, wenn sie allgemein genug geführt wird (also erst nach dem §. 68.), den großen Vorzug, daß bei ihr allein das Gesetz, nach welchem die Glieder der logarithmischen Reihe bis in's Unendliche fort gehen, mit entschiedener Nothwendigkeit hervortritt.

divergent wird, so ist sie, um Weiteres aus ihr zu entnehmen, nicht mehr zu gebrauchen.

Die übrigen Reihen, welche aus der für $log(1+x)$ gefundenen abgeleitet werden, z. B.

$$\text{II.}\quad log(1-x)=2n\pi\cdot i-x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4-\cdots$$

und

$$\text{III.}\quad log\frac{1+x}{1-x}=2n\pi\cdot i+2(x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{7}x^7+\cdots)$$

u. s. w. f. gewähren durchaus keine Schwierigkeiten, sobald man nur den Gesichtspunkt festhält,

a) daß man nicht mit Größen rechnet; sondern

b) daß alle Ausdrücke bloße angezeigte Operationen sind, und als Träger gewisser Eigenschaften angesehen werden müssen; daß also z. B. $log\frac{1+x}{1-x}$ bloß die Eigenschaft repräsentirt, daß, wenn e mit ihm potenzirt wird, dann $\frac{1+x}{1-x}$ wieder kommt. Die oben gefundene Reihe hat nun dieselbe Eigenschaft, d. h. wenn e mit ihr potenzirt wird, so daß man

$$e^{2n\pi\cdot i}\cdot e^{2x}\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}\cdot e^{\frac{2}{5}x^5}\cdots$$

erhält, so kommt $\dfrac{1+x}{1-x}$,

d. h. $(1+x)\cdot\dfrac{1}{1-x}$,

d. h. $(1+x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)$,

d. h. $1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+\cdots$

ohne Ende fort.

c) Ist dann die Reihe, wenn sie numerisch wird, convergent, so daß sie einen Werth hat, so hat dieser Werth dieselbe Eigenschaft, d. h. er ist dann einer der Werthe des $log.\frac{1+x}{1-x}$. Ist aber dieselbe Reihe für einen andern Werth von x divergent, so ist sie nicht mehr geeignet, einen der Werthe von

$log\frac{1+x}{1-x}$ zu liefern; denn sie ist überhaupt dann im Kalkul nicht mehr zulässig.

Man benützt die Reihen für die Logarithmen, um durch sie einige Logarithmen reeller Zahlen zu berechnen; und man macht sie zu diesem Behufe schneller convergent, indem man z. B. um $L\text{a}$, wo a positiv gedacht ist, zu berechnen, so verfährt; man sagt nämlich:

$$L\text{a} = \text{m}\cdot L\left(\sqrt[m]{\text{a}}\right),$$

(nach Nr. I.)

$$= \text{m}\cdot\left[\left(\sqrt[m]{\text{a}}-1\right) - \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[m]{\text{a}}-1\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\sqrt[m]{\text{a}}-1\right)^3 - \cdots\right],$$

während man m beliebig groß nimmt, damit $\sqrt[m]{\text{a}}-1$ sehr klein werde. — Allein es könnten, wenn man wollte, diese Reihen auch zur direkten Berechnung des Logarithmen irgend einer imaginären Zahl benutzt werden. Um dies hier nur durch ein Beispiel zu erläutern, sey $log(\text{P}+\text{Q}\cdot\text{i})$ zu berechnen, wo P und Q beliebig reell d. h. positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sind. Setzt man nun in die Formel C. $(\text{P}-1)+\text{Q}\cdot\text{i}$ statt x; berechnet man r und φ aus den Gleichungen

$\text{r} = +\sqrt{(\text{P}-1)^2+\text{Q}^2}$ und $K_\varphi = \frac{\text{P}-1}{\text{r}}$, $S_\varphi = \frac{\text{Q}}{\text{r}}$; so daß $\text{x} = \text{r}\cdot(K_\varphi + \text{i}\cdot S_\varphi)$, also $\text{x}^\text{n} = \text{r}^\text{n}\cdot(K_{\text{n}\varphi} + \text{i}\cdot S_{\text{n}\varphi})$ wird; — so erhält man (aus Nr. I.)

$$log(\text{P}+\text{Q}\cdot\text{i}) = log1 + \text{r}\cdot K_\varphi - \tfrac{1}{2}\text{r}^2\cdot K_{2\varphi} + \tfrac{1}{3}\text{r}^3\cdot K_{3\varphi} - \tfrac{1}{4}\text{r}^4\cdot K_{4\varphi} + \cdots$$
$$+ \text{i}\cdot\left[\text{r}\cdot S_\varphi - \tfrac{1}{2}\text{r}^2\cdot S_{2\varphi} + \tfrac{1}{3}\text{r}^3\cdot S_{3\varphi} - \tfrac{1}{4}\text{r}^4\cdot S_{4\varphi} + \cdots\right]$$

und danach läßt sich einer der Werthe von $log(\text{P}+\text{Q}\cdot\text{i})$ ausrechnen so oft $\text{r} < 1$ ist, während man dann wegen des allerersten Gliedes $log1$ oder $2\text{n}\pi\cdot\text{i}$, zu gleicher Zeit auch alle Werthe von $log(\text{P}+\text{Q}\cdot\text{i})$ hat. — Man könnte nun auch bei dieser letztern Aufgabe wieder Mittel angeben, diese Reihen schneller convergent zu machen, etwa dadurch, daß man zuvor die Rechnung so einrichtet, daß r beliebig klein wird.*)

*) Da man bereits Tafeln berechnet hat, in denen die Logarithmen der

Diese Andeutungen mögen jedoch hier hinreichen. Der geneigte Leser wird leicht erkennen, daß man eine große Menge von Untersuchungen hier einschalten kann, die eben so interessant sind, als sie auf die ganze hier vertretene Ansicht noch immer mehr Licht werfen, auf welche wir aber hier doch nicht eingehen können, ohne weitläufig zu werden und dadurch unsern gegenwärtigen Zweck zu stören.

§. 68.

Es entsteht nun die Frage, ob auch der binomische Lehrsatz noch für die unendlich vieldeutigen allgemeinen Potenzen gilt? — Und da findet man, daß er für diese allgemeinsten Potenzen immer wahr ist (d. h. für diejenigen Potenzen, welche der Vfr. in seinen Lehrbüchern unter dem Namen der „allgemeinen" schlechthin behandelt), sobald man ihm nur die Form giebt *)

$$(1+x)^z = 1^z \cdot \left[1 + z \cdot x + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{z^{3|-1}}{3!} \cdot x^3 + \frac{z^{4|-1}}{4!} \cdot x^4 + \cdots\right],$$

so daß er rechts mittelst des Faktors 1^z d. h. $e^{z \cdot log 1}$ d. h. $e^{2nz\pi \cdot i}$ gerade so viele verschiedene Formen darstellt, als dies mit $(1+x)^z$ zur Linken der Fall ist; und zwar gilt diese Gleichung so lange x noch ganz allgemein ist, unbedingt, daher auch noch, wenn die Reihe für besondere Werthe von x convergent werden sollte, während dieselbe Reihe jedoch ganz unbrauchbar wird (wie jede Reihe), wenn sie nicht mehr allgemein, sondern bereits numerisch und dabei zu gleicher Zeit divergent geworden seyn sollte.

Um dies zu beweisen fangen wir damit an, daß wir die unendliche Reihe

---

positiven Zahlen entnommen werden können, so ist für den etwaigen praktischen Bedarf das Verfahren des §. 58., um $log(P+Q \cdot i)$ zu finden, dem hiesigen vorzuziehen. Wir wollten nur darauf aufmerksam machen, daß dieser Weg betreten werden könnte.

*) Es bezeichnet $z^{n|d}$ ein Produkt von n Faktoren, wo der erste z, jeder folgende aber aus dem Vorhergehenden durch Addition von d entsteht; also das Produkt $z(z+d)(z+2d)\cdots$.

1) $1+z\cdot x+\frac{z^{2I-1}}{2!}x^2+\frac{z^{3I-1}}{3!}x^3+\frac{z^{4I-1}}{4!}x^4+\cdots$,

welche für jedes x und für jedes z gedacht ist, und unbekümmert darum, ob sie der Potenz $(1+x)^z$ gleich ist oder nicht, durch f_z bezeichnen, sie dann nach dem im §. 42. beschriebenen Verfahren in eine nach ganzen Potenzen von z fortlaufende Reihe verwandelt uns denken, welche durch

2) $1+X_1\cdot z+X_2\cdot z^2+X_3\cdot z^3+X_4\cdot z^4+\cdots$

vorgestellt und durch R_z bezeichnet seyn mag, so daß man

3) $f_z=R_z$

hat. Nun beweist man durch bloße Multiplikation der Reihen (wie Euler schon gethan hat), daß

4) $f_z\cdot f_y=f_{z+y}$

ist, und folgert daraus (mittelst der Gleichung Nr. 3.) daß auch

5) $R_z\cdot R_y=R_{z+y}$

seyn müsse. Aus dieser letztern Gleichung folgt aber, wie im §. 49. schon gezeigt ist, daß

6) $X_2=\frac{X_1^2}{2!},\ X_3=\frac{X_1^3}{3!},\ X_4=\frac{X_1^4}{4!},\cdots$ *)

ist, d. h. daß X_2, X_3, X_4, 2c. unendliche, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihen sind, welche man erhält, wenn

---

*) Man multiplicirt nämlich die beiden Reihen R_z und R_y mit einander, und erhält als Resultat die Reihe, deren allgemeines Glied

$$X_m\cdot X_n\cdot z^m\cdot y^n$$

ist. Hernach nimmt man R_{z+y} d. h. die Reihe, deren allgemeines Glied $X_p\cdot(z+y)^p$ ist, entwickelt für die verschiedenen Werthe von p, die Potenz $(z+y)^p$, so daß man als allgemeines Glied der Reihe

$$X_{m+n}\cdot\frac{(m+n)!}{m!n!}\cdot z^{m+n}$$

erhält; und die durch die Gleichung Nr. 5. bedingte Vergleichung giebt dann

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}X_{m+n}=X_m\cdot X_n,$$

oder für $n=1$

$$(m+1)X_{m+1}=X_m\cdot X_1$$

für jede ganze Zahl m.

man die unter X_1 vorgestellte unendliche (nach x fortlaufende) Reihe bezüglich zur 2ten, 3ten, 4ten 2c. 2c. Potenz erhebt, und bezüglich durch 2!, 3!, 4!, 2c. 2c. dividirt. Die Reihe X_1 findet sich aber aus der Gleichung $f_z = R_z$, wenn man die Einheit auf beiden Seiten subtrahirt, dann durch z dividirt, und zuletzt auf beiden Seiten Null statt z setzt. Dies giebt

7) $X_1 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 -$ 2c. 2c.

d. h. nach §. 67.

8) $X_1 = Lg(1+x)$

unter $Lg(1+x)$ eine der Formen für den natürlichen Logarithmen von $1+x$ verstanden.

Durch die Gleichungen Nr. Nr. 6. und 7. oder 8. sind daher die Koefficienten der Reihe Nr. 2. (oder R_z), in welche sich die Reihe Nr. 1. (oder f_z) umformen läßt, bis in's Unendliche fort gefunden, während man nun durchaus noch nicht weiß, welchem andern Ausdruck die Reihe Nr. 1. (oder f_z) gleich ist.

Nun ist aber auf der andern Seite vermöge der Definition der allgemeinen Potenz

$$\begin{aligned}(1+x)^z &= e^{z \cdot log(1+x)} = e^{z \cdot [log 1 + Lg(1+x)]} \\ &= e^{z \cdot log 1} \cdot e^{z \cdot Lg(1+x)} = 1^z \cdot e^{z \cdot X_1} \\ &= 1^z \cdot \left(1 + X_1 z + \frac{X_1^2 \cdot z^2}{2!} + \frac{X_1^3 \cdot z^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= 1^z \cdot R_z;\end{aligned}$$

also ist auch wegen $R_z = f_z$ (Nr. 3.) ganz allgemein

$$(1+x)^z = 1^z \cdot f_z;$$

d. h.

$$(\odot) \cdot\cdot \; (1+x)^z = 1^z \cdot \left[1 + z \cdot x + \frac{z^{2I-1}}{2!} \cdot x^2 + \frac{z^{3I-1}}{3!} \cdot x^3 + \cdots\right],$$

welches der binomische Lehrsatz für die unendlich vieldeutige allgemeine Potenz ist, und wo z und x ganz willkürlich gedacht, bloße Träger der Operationszeichen sind, also eben so gut reell wie imaginär seyn können.

Der ganze Beweis zeigt aber nichts weiter, als daß sich die durch $(1+x)^z$ d. h. durch $e^{z \cdot log(1+x)}$ vorgestellte unendliche Reihe in die andere unendliche Reihe, welche wir die Binomial-

Reihe nennen, den Gesetzen der Operationen gemäß, im Allgemeinen umformen läßt.

Wollte man in (⊙) rechts den Faktor 1^z weglassen, also nur die eine f_z der verschiedenen Formen nehmen, so würde solche natürlich auch nur einen der Werthe von $(1+x)^z$ ausdrücken, aber man müßte erst in jedem Falle noch untersuchen, welcher der Werthe es ist, und man darf daher nicht so geradezu behaupten, daß man dann den durch $e^{z \cdot L(1+x)}$ ausgedrückten einfachsten Werth von $(1+x)^z$ habe.

Sind aber x und z reell, und ist die Binomial-Reihe f_z zu gleicher Zeit convergent, so ist es keinem Zweifel unterworfen, daß der Werth dieser Binomial-Reihe f_z allemal der einfachste (nämlich der reelle) Werth von $(1+x)^z$ ist.

Wenn wir hier nun den binomischen Lehrsatz in seiner allgemeinsten Gestalt hingestellt, und ganz allgemein erwiesen, auch den Beweis mit solcher Sorgfalt geführt haben, daß er für jeden Leser völlige Ueberzeugung mit sich führen muß, der nur sonst die hier vertretenen Ansichten anerkennt, stehen wir natürlich mit dem berühmten Cauchy und allen denen in Widerspruch, welche sich den binomischen Lehrsatz d. h. diese Entwickelung von $(1+x)^z$ nur in dem Falle anzuwenden getrauen, wenn x nicht mehr allgemein sondern bereits als ein reeller Ziffernwerth gedacht ist, und klein genug, um die Binomial-Reihe zu einer convergenten (numerischen) zu machen.

§. 69.

Der Ausdruck S_x (§. 50.) hat für jeden reellen oder imaginären Werth von x von der Form $p+q \cdot i$, allemal einen Werth und allemal nur einen einzigen, und dieser ist von derselben Form $p+q \cdot i$. — Dasselbe gilt von der Funktion K_x (§. 50.). — Man kann nun noch die Quotienten

$$\frac{S_x}{K_x}, \quad \frac{K_x}{S_x}, \quad \frac{1}{K_x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{S_x},$$

welche ebenfalls Funktionen von x sind, die für jeden reellen

oder imaginären Werth von x allemal einen und nur einen Werth haben, durch die eigenthümlichen Zeichen

$$Tg_x, \quad Cotg_x, \quad Sec_x \text{ und } Cosec_x$$

bezeichnen, und diese Zeichen in den Rechnungen gebrauchen.

Umgekehrt: setzt man $S_x = z$, d. h. (nach §. 51.)

$$1) \qquad \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = z,$$

so findet man aus dieser Gleichung

$$2) \qquad e^{xi} = zi \pm \sqrt{1 - z^2},$$

also

$$3) \quad x = \frac{1}{i} \cdot log(z \cdot i \pm \sqrt{1 - z^2}) = \frac{1}{i} \cdot log(\pm\sqrt{1 - S_x{}^2} + i \cdot S_x),$$

d. h. man findet aus dieser Gleichung Nr. 1. für x (wenn man so sagen will) 2mal unendlich viele Werthe, in sofern der Logarithmand $z \cdot i \pm \sqrt{1 - z^2}$ zwei Werthe hat, und für jeden Logarithmanden wiederum unendlich viele Werthe des natürlichen Logarithmen existiren (§. 58.); und da alle diese Werthe von x aus Nr. 3., der Gleichung Nr. 1. wirklich genügen, wie die Substitution lehrt, so drückt die Gleichung Nr. 3. alle zu $S_x = z$ gehörigen Argumente (Bogen) x aus, es mag z d. h. S_x reell oder imaginär gegeben seyn. Weil aber alle Werthe von $log\,b$ gefunden werden, wenn man alle Werthe von $log\,1$ oder $2n\pi \cdot i$ zu einem einzigen beliebigen der Werthe von $log\,b$, der durch $Lg\,b$ bezeichnet seyn mag, addirt, so hat man noch

$$4) \qquad x = 2n\pi + \frac{1}{i} \cdot Lg(z \cdot i \pm \sqrt{1 - z^2}),$$

wo n Null und jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt, während Lg deshalb noch zwei Werthe hat, weil der Logarithmand selbst noch zwei-deutig ist. — Jeden solchen Werth von x kann man das zu einem gegebenen S_x oder z gehörige Argument nennen*) und durch $\frac{1}{S}z$ bezeichnen, und dann drückt sich die Gleichung Nr. 4. noch so aus:

---

*) In der (nach der Analysis zu entwickelnden) Geometrie wird bewiesen,

$$\text{I.}\qquad \frac{1}{S}z = \frac{1}{i}\cdot log(z\cdot i \pm \sqrt{1-z^2})$$
$$= 2n\pi + \frac{1}{i}\cdot Lg(z\cdot i \pm \sqrt{1-z^2}).$$

Bezeichnet man nun durch $\frac{1}{K}z$, $\frac{1}{Tg}z$, $\frac{1}{Cotg}z$, die unendlich vielen Werthe von x, für welche bezüglich $K_x = z$, oder $Tg_x = z$, oder $Cotg_x = z$ ist, so erhält man ganz auf dieselbe Weise noch

$$\text{II.}\qquad \frac{1}{K}z = \frac{1}{i}\cdot log(z \pm i\cdot\sqrt{1-z^2})$$
$$= 2n\pi + \frac{1}{i}\cdot Lg(z \pm i\cdot\sqrt{1-z^2});$$

$$\text{III.}\qquad \frac{1}{Tg}z = \frac{1}{2i}\cdot log\frac{1+z\cdot i}{1-z\cdot i}$$
$$= n\pi + \frac{1}{2i}\cdot Lg\frac{1+z\cdot i}{1-z\cdot i};$$

$$\text{IV.}\qquad \frac{1}{Cotg}z = \frac{1}{2i}\cdot log\frac{z+i}{z-i}\;{}^{*})$$
$$= n\pi + \frac{1}{2i}\cdot Lg\frac{z+i}{z-i},$$

---

daß so oft S_x oder K_x reell und (absolut) kleiner als 1 ist, dann das Argument x allemal einen Kreisbogen ausdrückt, dessen Radius $=1$, und dessen, aus dem Mittelpunkte desselben genommene Abscisse und Ordinate bezüglich die Werthe S_x und K_x haben. — Aus diesem Grunde pflegt man, das Ganze nach dem Theile benennend, auch im Allgemeinen durch das Wort Bogen das zu bezeichnen, was so eben durch das Wort Argument ausgedrückt ist.

*) Man hat (§. 50.)

$$1)\qquad e^{xi} = K_x + i\cdot S_x;$$
$$2)\qquad e^{-xi} = K_x - i\cdot S_x;$$

also, wenn man dividirt

$$3)\qquad e^{2xi} = \frac{K_x + i\cdot S_x}{K_x - i\cdot S_x};$$

daher auch

wo überall unter n Null und jede positive und jede negative ganze Zahl verstanden wird, während Lg einen einzigen beliebigen Werth des natürlichen Logarithmen ausdrückt, und z jedesmal jeden beliebigen (reellen oder imaginären) Werth von der Form $p+q\cdot i$ vorstellt.

Die durch die Zeichen $\frac{1}{S}z$, $\frac{1}{K}z$, $\frac{1}{Tg}z$ und $\frac{1}{Cotg}z$ ausgedrückten Funktionen von z sind also unendlich vieldeutige logarithmische, während die durch die Zeichen S_x, K_x, Tg_x, $Cotg_x$ vorgestellten Funktionen von x allemal eindeutige exponentielle Funktionen von x sind, welche eben deshalb nur eindeutig sind, weil sie nur die (eindeutige) natürliche Potenz in sich aufnehmen.*)

$$4)\qquad e^{2xi}=\frac{1+i.Tg_x}{1-i\cdot Tg_x}=\frac{Cotg_x+i}{Cotg_x-i}.$$

Daraus folgen aber alle Formeln Nr. Nr. I.—IV.

*) Man findet später, wenn $\frac{1}{S}z$ nur einen einzigen der Werthe vorstellt,

$$\frac{1}{S}z=z+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{z^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{z^7}{7}+\cdots,$$

oder, wenn man $\frac{1}{S}z=x$ setzt, so daß

$S_x=z$ wird,

$$(\odot)\cdots\qquad x=z+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{z^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{z^7}{7}+\cdots,$$

wo x einen der Werthe des zu $S_x=z$ gehörigen Arguments x vorstellt. Löst man dieselbe Gleichung ($\odot$) nun aber nach z auf, so daß man z in x ausdrückt, so hat sie nach z die Form einer höheren Gleichung vom unendlichen Grade und sie kann daher für z unendlich viele Werthe geben. Wollte man aber daraus folgern, daß deshalb S_x für ein gegebenes x unendlich viele Werthe habe, so würde man denselben Fehler begehen, gegen welchen in der Einleitung S. 10 gewarnt worden ist; d. h. man würde ein allgemeines Urtheil allgemein umkehren, was gegen die Gesetze der Logik ist. Die Gleichung ($\odot$) ist nämlich so gefunden, daß man gewiß ist, daß, so oft unter z die Reihe S_x verstanden wird, die Gleichung selbst eine richtige (identische) wird. Daraus kann man aber nur folgern: Unter allen Werthen, die, statt z gesetzt, der Gleichung ($\odot$) genügen, muß derjenige mit begriffen seyn, welcher $=S_x$ ist.

Nach §. 67. Nr. III. kann man aber den Logarithmen von $\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i}$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandeln, und dadurch geht die vorstehende Formel Nr. III. über in

$$\text{V.}\quad \frac{1}{Tg} z = n\pi + z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \cdots.$$

Man kann sich dieser Formel bedienen um die Zahl π zu berechnen, die wir oben (§. 53.) als die kleinste positive Zahl definirt haben, für welche

$$S_{\frac{1}{2}\pi} = 1 \quad \text{und} \quad K_{\frac{1}{2}\pi} = 0$$

ist. Man berechnet nämlich hieraus und aus den Formeln (§. 51. Nr. Nr. VIII. und IX.), nämlich aus

$$S_{\frac{1}{2}\nu} = \sqrt{\frac{1-K_\nu}{2}} \quad \text{und} \quad K_{\frac{1}{2}\nu} = \sqrt{\frac{1+K_\nu}{2}},$$

indem man $\frac{1}{2}\pi$ statt ν setzt,

$$S_{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}; \quad K_{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ also } Tg_{\frac{1}{4}\pi} = 1;$$

demnach aus Nr. V.

$$\frac{1}{Tg} 1 = n\pi + 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \cdots,$$

während einer dieser Werthe von $\frac{1}{Tg} 1$ die Zahl $\frac{1}{4}\pi$ ist.

Da man aber von $\frac{1}{2}\pi$ schon weiß (§. 53.), daß dieser Werth zwischen 1 und 2 liegt, daß also $\frac{1}{4}\pi$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen müsse, so überzeugt man sich sogleich, daß $n = 0$ genommen werden muß, wenn man gerade das durch $\frac{1}{4}\pi$ ausgedrückte Argument haben will, da der Werth der Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} -$ rc. zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 zu liegen kommt.

Wir übergehen die Mittel, die man nun anwenden kann, um π durch noch schneller convergirende Reihen auszudrücken (indem man in Nr. V. kleinere Werthe statt z setzt), da solche durchaus keine theoretischen Schwierigkeiten gewähren.

§. 70.

Weil aber $\frac{1}{S}x$, $\frac{1}{K}x$, $\frac{1}{Tg}x$, $\frac{1}{Cotg}x$ wiederum unendlich vieldeutige Zeichen sind, so muß auch mit ihnen mit derselben Sorgfalt gerechnet werden, welche man bei dem Rechnen mit mehrdeutigen oder unendlich vieldeutigen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen anwenden muß; d. h. man darf z. B. im Allgemeinen nicht

$$\text{statt } p\cdot\frac{1}{S}x \pm q\cdot\frac{1}{S}x \text{ setzen } (p\pm q)\cdot\frac{1}{S}x,$$

weil solches nur dann erlaubt ist, wenn in beiden addirten Produkten zur Linken der Faktor $\frac{1}{S}x$ jedesmal ein und derselbe, also ein gemeinschaftlicher ist, d. h. wenn $\frac{1}{S}x$ jedesmal einen und denselben seiner Werthe bezeichnet.

Die Formeln, nach denen gewöhnlich mit diesen Funktionen gerechnet wird, nämlich die Formeln

1) $\frac{1}{S}x + \frac{1}{S}z = \frac{1}{Sin}\left[x\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2}\right];$

2) $\frac{1}{S}x - \frac{1}{S}z = \frac{1}{Sin}\left[x\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-x^2}\right];$

III. $\frac{1}{K}x + \frac{1}{K}z = \frac{1}{K}\left[xz - \sqrt{(1-x^2)(1-z^2)}\right];$

IV. $\frac{1}{K}x - \frac{1}{K}z = \frac{1}{K}\left[xz + \sqrt{(1-x^2)(1-z^2)}\right];$

V. $\frac{1}{Tg}x + \frac{1}{Tg}z = \frac{1}{Tg}\frac{x+z}{1-xz};$

VI. $\frac{1}{Tg}x - \frac{1}{Tg}z = \frac{1}{Tg}\frac{x-z}{1+xz}$

u. s. w. f.

müssen alle noch untersucht werden, ob sie auch wirkliche, im

Sinne des §. 3. richtige Gleichungen sind, oder ob sie noch einer Verbesserung bedürfen.

Untersucht man nun dies näher, so findet man:

Die Formeln Nr. Nr. 1. und 2. haben, weil alle Kombinationen der Wurzelwerthe $\sqrt{1-x^2}$ und $\sqrt{1-z^2}$ genommen werden müssen, mehr Werthe zur Rechten als zur Linken; und wenn man nicht alle Kombinationen dieser Wurzelwerthe nehmen wollte, so würde der Ausdruck zur Rechten in Nr. Nr. 1. und 2. theils Werthe nicht haben, welche der Ausdruck zur Linken enthält, theils aber auch Werthe haben, die links nicht vorkommen. — Wird nämlich in Nr. 1. das Argument (der Bogen) zur Rechten durch β bezeichnet, so hat man

$S_\beta = x\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2}$, und also entweder

$K_\beta = +(-xz + \sqrt{(1-x^2)(1-z^2)})$ oder

$K_\beta = -(-xz + \sqrt{(1-x^2)(1-z^2)})$. Der Ausdruck zur Rechten in Nr. 1. enthält nun alle Argumente (Bogen), welche dem einen Werthe von K_β, und auch alle diejenigen, welche dem andern Werthe von K_β zukommen, während die Summe zur Rechten nur alle diejenigen Werthe liefert, welche dem erstern Werthe von K_β entsprechen. — Ganz Analoges gilt von der Gleichung Nr. 2. — Beide Gleichungen Nr. Nr. 1. und 2. sind daher im Sinne des §. 3. nicht richtige Gleichungen, und dürfen deshalb nur mit großer Vorsicht angewandt werden.

Die Gleichungen Nr. Nr. III. — VI. dagegen weisen sich als richtige Gleichungen aus, welche auf keiner Seite mehr, aber auch auf keiner Seite weniger Werthe haben als auf der andern, und welche auf jeder Seite auch dieselben Werthe enthalten, so daß die Definition des §. 3. (nach welcher beide Seiten einer Gleichung unbedingt für einander gesetzt werden können) erfüllt ist.

Betrachten wir noch die in den Anwendungen öfter vorkommenden Gleichungen:

3) $$\frac{1}{S}x = \frac{1}{K}\sqrt{1-x^2};$$

4) $$\frac{1}{S}x = \frac{1}{Tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

5) $$\frac{1}{K}x = \frac{1}{S}\sqrt{1-x^2};$$

6) $$\frac{1}{K}x = \frac{1}{Tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

7) $$\frac{1}{Tg}x = \frac{1}{S}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

8) $$\frac{1}{Tg}x = \frac{1}{K}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Man findet nun, wenn auch die Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser Gleichungen näher untersucht wird,
daß an die Stelle der Gleichung Nr. 3. treten muß

VII. $$\frac{1}{S}(\pm x) = \frac{1}{K}\sqrt{1-x^2};$$

statt der Nr. 4. dagegen zu stehen kommt:

VIII. $$\frac{1}{S}(\pm x) = \frac{1}{Tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

daß an die Stelle der Nr. 5. tritt

IX. $$\frac{1}{K}(\pm x) = \frac{1}{S}\sqrt{1-x^2},$$

während die Nr. 6. ersetzt werden muß durch

X. $$\frac{1}{K}(\pm x) = \frac{1}{Tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

daß ferner statt der Nr. 7. die folgende:

XI. $$\frac{1}{Tg}(\pm x) = \frac{1}{S}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

und statt der Nr. 8. die nachstehende

XII. $$\frac{1}{Tg}(\pm x) = \frac{1}{K}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

treten muß, wenn man lauter richtige, bei jedem allgemeinen Rechnen anwendbare, der Definition des §. 3. entsprechende Gleichungen haben will.

Die Gleichungen Nr. Nr. 1. und 2. endlich, an denen wir oben gefunden haben, daß sie nicht richtig sind, werden ebenfalls in richtige, bei jedem allgemeinen Rechnen mit der vollkommensten Sicherheit des Erfolges anwendbare Gleichungen umgeformt, wenn man sie so schreibt:

$$\text{I.}\quad \frac{1}{S}(\pm x)+\frac{1}{S}(\pm z)=\frac{1}{S}\left[x\sqrt{1-z^2}+z\sqrt{1-x^2}\right];$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{S}(\pm x)-\frac{1}{S}(\pm z)=\frac{1}{S}\left[x\sqrt{1-z^2}-z\sqrt{1-x^2}\right].$$

Die hier hingestellten Gleichungen Nr. Nr. I.—XII. können also mit dem Bewußtseyn zum Rechnen verwendet werden, daß ihre Anwendung nie und zu keiner Zeit, wie allgemein auch die Rechnungen selbst geführt werden, zu Widersprüchen führen kann.*)

In allen diesen Formeln sind aber x und z ganz allgemein und eben sowohl beliebig reell oder beliebig imaginär gedacht.

§. 71.

Zum Schlusse machen wir noch folgende Bemerkungen:

1) Es giebt Funktionen von x (wie z. B. $\sqrt{ax^2+bx+c}$, so oft a negativ und $4ac>b^2$ ist), welche für jeden reellen Werth von x immer nur imaginäre Werthe haben.

---

*) Die hier erwähnten Untersuchungen machen sich sehr bequem, wenn man statt der Zeichen $\frac{1}{S}$, $\frac{1}{K}$ und $\frac{1}{Tg}$ nach §. 69. die logarithmischen Funktionen setzt, während des Rechnens mit Logarithmen aber mit Sorgfalt darauf sieht, daß nur solche Formeln der Logarithmen zum Rechnen verwendet werden, welche als allgemein gültig anerkannt worden sind; z. B. nicht die unrichtige Formel $log(a^2)=2log\,a$; sondern die richtige Formel $log(a^2)=2log(\pm a)$.

2) Es giebt Funktionen von x, welche für jeden reellen Werth von x immerfort imaginäre Werthe annehmen, aber dabei, wie z. B. $p+\sqrt{-(x-a)^2}$ für den einzigen Werth $x=a$, reell werden, oder wie z. B. $p+\sqrt{-(x-a)^2(x-b)^2}$ nur für zwei Werthe von x, nämlich für $x=a$ und auch für $x=b$ reell werden, oder, wie z. B. $p+\sqrt{-(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$, für nur drei Werthe a, b, c von x, reell werden, u. s. w. f.

3) Man kann sich auch Funktionen denken von der Form

$$f_x+\psi_x\cdot\sqrt{-(x-a)^2}$$

oder

$$f_x+\psi_x\cdot\sqrt{-(x-a)^2(x-b)^2}$$

u. s. w. f., die ebenfalls für alle reellen Werthe von x nur einmal, oder nur zweimal, u. s. f. reell werden.

Und so kann man sich unendlich viele der verschiedensten Formen denken, welche x enthalten, deshalb Funktionen von x genannt werden, welche entwickelt oder verwickelt gegeben sind, welche in endlicher Form oder in Form von unendlichen Reihen, die nach Potenzen irgend eines allgemeinen Buchstaben fortschreiten, dargestellt sind und welche die verschiedensten Eigenschaften aussprechen können.

4) Alle diese Funktionen von x kann man in Reihen verwandeln, die nach Potenzen von x, oder nach Potenzen von z fortlaufen, wo z irgend eine bestimmte Funktion von x vorstellt; und mit diesen Reihen, wie mit den Funktionen selbst, kann man allemal und unbedingt sicher rechnen, so lange nur x ganz allgemein gedacht ist (als ein bloßer Träger der Operationen), und wenn man nur lauter Formeln zum Rechnen verwendet, welche allgemein gültig sind,*) d. h.

---

*) Namentlich darf man also, wenn mit Potenzen im Allgemeinen richtig gerechnet werden soll, die Formeln

$$a^x\cdot a^z=a^{x+z} \quad \text{und} \quad \frac{a^x}{a^z}=a^{x-z} \quad \text{und} \quad (a^x)^z=a^{xz}$$

welche hier in dieser Schrift geprüft und als richtig gefunden, oder vervollständigt worden sind.

5) Dann stößt man aber auch, **wenn die Analysis weiter fortgesetzt wird**, auf Ausdrücke, welche **bestimmte Integrale** genannt werden, oder auf Ausdrücke, welche aus solchen bestimmten Integralen zusammengesetzt sind, und welche häufig so genannte **discontinuirliche Funktionen** darstellen. Von dort ab unterscheide man a) **continuirliche** und b) **discontinuirliche** Funktionen, und versteht unter ersteren die von uns bisher betrachteten Ausdrücke, d. h. die **Formen**, welche durch **angezeigte**, beliebig (oder auch unendlich) oft wiederholte, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzirung, Radikation und Logarithmation entstehen, sobald nur die unendlichen Reihen bis in's Unendliche fort nach einem bestimmten Gesetz und außerdem nach Potenzen eines allgemeinen Fortschreitungs-Buchstaben fortlaufen.

6) Für diese **continuirlichen** Funktionen gilt also das unbedingte allgemeine Rechnen, wie solches in der gegenwärtigen Schrift gelehrt worden ist, bei welcher man sich weder um die Convergenz der allgemeinen unendlichen Reihen, noch überhaupt um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben zu bekümmern braucht, eben weil das Rechnen (nach §. 6.) nur mit allgemeinen Ausdrücken, d. h. nur mit angezeigten Operationen, d. h. nur mit **Formen** es zu thun hat.

7) In Bezug auf die sogenannten **discontinuirlichen** Funktionen, und überhaupt in Bezug auf Ausdrücke, die in der weitern Ausführung der Analysis erst noch erscheinen, muß man

---

nicht anwenden, weil sie nicht allgemein gültig sind; sondern es müssen an deren Stellen die richtigen (d. h. die verbesserten) Formeln treten, welche hier im §. 64. gegeben worden. Wir heben aber gerade diesen Fehler besonders noch einmal hervor, weil man sich so sehr daran gewöhnt hat, im Allgemeinen mit Potenzen nach denselben Formeln zu rechnen, die man für eindeutige besondere Potenzen als wahr gefunden hat. — Sonst aber sind es, wie wir gesehen haben, unter den in der Buchstabenrechenkunst aufgenommenen Formeln, die dieser Potenzen nicht allein, welche keine allgemeine Gültigkeit haben.

natürlich die Zeit ihres Erscheinens auch erst abwarten; dann aber hat der Analyst die Pflicht „eine möglichst befriedigende Theorie" dieser neuen Erscheinungen hinzustellen. Dazu hat jedoch der Vfr. ein zweites Heft dieser Schrift, von einem ähnlichen Umfange, bestimmt.

Den hier uns noch vergönnten Raum wollen wir aber dazu benutzen, zu zeigen, wie nun diese bisher entwickelte Lehre der Formen, zur Vergleichung der Größen angewendet werden kann.

Anhang.

Von den Größen.

§. 72.

1) Sollen Größen mittelst des Kalkuls mit einander verglichen werden, so müssen sie als **benannte Zahlen** ausgedrückt seyn (oder gedacht werden), welche sich auf eine und dieselbe Benennung beziehen.

2) Nun giebt es aber anfänglich d. h. in der Wirklichkeit, nur benannte **ganze** Zahlen, die jedoch durch Multiplikation oder Division der unbenannten Zahlen auf **niedere** oder **höhere** Einheiten (Benennungen) gebracht werden; d. h. Fuße auf **Zolle**, oder wieder **Zolle** auf Fuße.

3) Bei dem letztern Geschäft der Division entstehen aber nicht immer ganze Zahlen und dies zeigt an, daß z. B. 20 Sgr., oder 40 Sgr. nicht in Thalern sich ausdrücken lassen. Um aber benannte Zahlen im Allgemeinen, d. h. wenn sie noch nicht bestimmt und gegeben sind, auf höhere Einheiten (durch allgemeine Division ihrer unbenannten Zahlen) bringen zu können, ist es nicht bloß erlaubt, sondern auch nothwendig, **gebrochene** benannte Zahlen einzuführen, dergestalt, daß man unter der gebrochenen benannten Zahl $\frac{a}{b}$E das afache des b^{ten} Theils der Benennung (Einheit) E versteht. Diese Einführung der **gebrochenen** benannten Zahl hat zur Folge, daß man niedere Einheiten (durch Division ihrer unbenannten Zahl) auf höhere verwandeln kann, ohne daß man sich darum zu bekümmern

braucht, ob der durch Division erhaltene Quotient einer ganzen Zahl gleich, oder ein selbstständiger Quotient (eine bloß angezeigte Division) sey und bleibe, so daß eben deshalb diese Umformung der benannten Zahlen mit Sicherheit erfolgen kann, auch wenn sie noch ganz unbekannt sind; während umgekehrt dann auch wieder jede ganze oder gebrochene benannte Zahl durch Multiplikation ihrer unbenannten Zahl auf niedere Einheiten gebracht wird, — wie leicht bewiesen werden kann.

§. 73.

Nun definirt man:

1) Gleiche Größen sind solche, die durch dieselbe benannte Zahl ausgedrückt werden können.

2) Größere Größe, oder kleinere Größe ist diejenige, welche durch die größere oder kleinere (positive ganze oder gebrochene) unbenannte Zahl im Sinne des §. 23. ausgedrückt wird (immer unter der Voraussetzung der gemeinschaftlichen Benennung).

Daraus folgt zugleich, daß sehr kleine und sehr große Größen auch durch sehr kleine und sehr große positive unbenannte Zahlen (letztere im Sinne des §. 23. gedacht) ausgedrückt werden, die sich auf eine bestimmte Benennung (Einheit) beziehen.

§. 74.

Die Größen erlauben und erfordern

1) ein Vereinigen zweier oder mehrerer in eine neue und größere;

2) ein Hinwegnehmen eines Theils vom Ganzen, d. h. einer Größe von einer größeren;

3) ein Vervielfältigen einer und derselben Größe, z. B. wenn die Größe nfach genommen werden soll; endlich

4) ein Theilen einer solchen Größe in eine Anzahl z. B. n gleicher Theile.

Das Resultat des erstern Geschäfts drückt man als benannte Zahl aus, wenn man die unbenannten (ganzen oder gebrochenen) Zahlen addirt im Sinne des §. 3., und die Summe auf dieselbe Benennung bezieht.

Das Resultat des Geschäfts in Nr. 2. wird durch Subtraktion (im Sinne des §. 3.) der unbenannten Zahlen erzielt.

Das Resultat der Aufgabe in Nr. 3. wird erreicht, wenn man die unbenannte (ganze oder gebrochene) Zahl mit n multiplicirt, im Sinne des §. 11.

Endlich wird das Resultat der Aufgabe in Nr. 4. erreicht, wenn man die unbenannte (positive ganze oder gebrochene) Zahl durch n dividirt, im Sinne des §. 11.

Alles unter der Voraussetzung, daß man immer gemeinschaftliche Benennungen oder Einheiten habe.

Auf diese Weise werden alle Aufgaben der Größen auf Operationen mit unbenannten (ganzen oder gebrochenen) Zahlen zurückgeführt in dem Sinne der vorhergehenden Kapitel, so daß all' das Vorhergegangene von den Zahl-Formen, hier zur Vergleichung der Größen unmittelbare und direkte Anwendung findet.

Anmerkung. Damit ist aber alles erschöpft, was die allgemeine Größenlehre nur immer an Aufgaben darbieten kann. In jeder Aufgabe nämlich, wo aus dem gegebenen Zusammenhang der Dinge, von der Größe (quantitas) gegebener Größen auf die Größe (quantitas) noch unbekannter Größen geschlossen werden soll, kommt alles darauf an, daß man die gegebenen Größen als gegebene benannte Zahlen ausdrückt, die unbekannten Größen aber als unbekannte benannte Zahlen (d. h. als benannte Zahlen, in welcher zwar die Benennung oder Einheit angenommen, also völlig bestimmt ist, in welcher aber die unbenannten ganzen oder gebrochenen Zahlen noch unbekannt und daher einstweilen durch x, z, 2c. 2c. oder durch zusammengesetztere und, Unbekannte in sich aufgenommen habende Ausdrücke bezeichnet sind). Indem man nun aus den Bedingungen

der Aufgabe für eine und dieselbe Größe d. h. für ihre unbenannte Zahl zwei verschiedene Formen findet, so müssen diese letzteren einander gleich seyn (im Sinne des §. 3.), und so bekommt man die Gleichungen zwischen den bloßen Formen (unbenannten ganzen oder gebrochenen Zahlen), welche den Ansatz der Aufgabe bilden und welche nachgehends nach den, in ihnen vorkommenden Unbekannten aufgelöst werden müssen, um Werthe für die Unbekannten zu erhalten, welche diesen Gleichungen genügen. Genügen dieselben dann auch den übrigen Bedingungen der Aufgabe (unter denen oben an steht, daß sie nicht imaginär und nicht negativ seyen), so hat man die gesuchten unbenannten ganzen oder gebrochenen Zahlen, und somit auch die unbekannten benannten Zahlen, d. h. die unbekannten Größen gefunden.*)

So viel von der allgemeinen Größenlehre. —

Kommt man dann später zu den Raum-Größen; behandelt man die Kurven und unter diesen den Kreis; und giebt man sich das Problem, den Kreisbogen x in seine Ordinate y auszudrücken, für den Fall, daß der Radius des Kreises $=1$ gedacht wird, so findet sich zwischen x und y die Gleichung $y=S_x$, während S_x die im §. 50. bestimmte unendliche Reihe bedeutet. Auf diese Weise findet sich, daß die im §. 50. behandelten beiden Reihen K_β und S_β, so oft β die Länge eines Kreisbogens darstellt (in dem Kreise, dessen Radius $=1$ ist), gewisse gerade Linien im Kreise ausdrücken, und zwar diejenigen, welche in der sogenannten Elementar-Trigonometrie unter dem Namen der Kosinus und Sinus vorgezeigt und behandelt werden.

Die Sinus und Kosinus der sogenannten Elementar-Trigonometrie sind danach nichts anders als die Ziffern-Werthe jener allgemeinen Buchstaben-Ausdrücke K_β und S_β, für die-

---

*) Man könnte auch negative benannte Zahlen einführen; man würde aber bald finden, daß sie nur in einem geringen Umfange benützt werden könnten, und daß ihre Einführung mit vielen Nachtheilen und fast mit gar keinem Vortheil verknüpft seyn würde.

jenigen kleinen und positiven Werthe von β genommen, welche die Länge eines Bogens in dem Kreise ausdrücken, dessen Radius $=1$ ist. Von diesen Ziffern-Werthen zu den Buchstaben-Ausdrücken selbst sich zu erheben, war eine Aufgabe, die man in der Geschichte der Mathematik zwar gelöst findet, die aber, — wie alle solche Aufgaben, wo von bloßen (Ziffern-)Werthen auf die Form der Ausdrücke geschlossen werden soll, denen sie angehören, — eine völlig befriedigende Lösung nie und zu keiner Zeit zulassen kann.

Gedruckt bei den Gebr. Unger.

In demselben Verlage sind folgende mathematische Bücher erschienen:

Magnus, L. Imm., Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie (der Ebene). Mit 4 Kupfertafeln. Lex. 8. 2 Thlr. 25 Sgr.
— — Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes. Erste Abthlg. Lex. 8. 2 Thlr. 25 Sgr.
Plücker, Dr. Jul., System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend. Mit 6 Kupfertafeln. gr. 8. 3 Thlr. 15 Sgr.
Hirsch, Meier, Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Sechste durchgesehene Aufgabe. gr. 8. 1 Thlr. 10 Sgr.
Fortsetzung der Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra; oder Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. 1r. Theil. 8. 1809. 1 Thlr. 20 Sgr.
Sammlung geometrischer Aufgaben.
Erster Theil (Planimetrie und Trigonometrie). Mit 10 Kupfertafeln. 8. 1805. 1 Thlr. 20 Sgr.
Zweiter Theil (Polygonometrie, Stereometrie, sphär. Trigonometrie). Mit 10 Kupfertafeln. 8. 1807. 1 Thlr. 20 Sgr.
Integral-Tafeln, oder Sammlung von Integral-Formeln. gr. 8. 3 Thlr.
Egen, P. N. C., Handbuch der allgemeinen Arithmetik. Besonders in Beziehung auf die „Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra von Meier Hirsch.“ Theil I. Die Buchstabenrechnung. Zweite verbesserte Aufl. Mit Königl. Würtemb. Privilegium gegen den Nachdruck. Mit 1 Kpfr. gr. 8. 2 Thlr.
— — desselben Werkes Thl. II. die Algebra. Zweite verbesserte Aufl. Mit 4 Kpfrn. gr. 8. 2 Thlr. 10 Sgr.
Sachs, Sal., Auflösungen der in Meier Hirsch's Sammlung aus der Buchstabenrechnung und Algebra enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. 5te verbesserte Auflage. 8. 1 Thlr. 20 Sgr.
Boltze, H. L. Lehrbuch der Statik und Mechanik fester Körper für Schulen und den Selbstunterricht. Mit Kupfertafeln gr. 8. 26¼ Sgr.
Gruson, J. Ph., die Kegelschnitte; elementarisch, geometrisch, algebraisch, zum Behuf der Vorlesungen abgehandelt. 8. Mit 4 Kpfn. 1 Thlr. 10 Sgr.
Huberdt, A., Elemente der ebenen Trigonometrie nebst praktischen Aufgaben für Gymnasien und höhere Bürger- und Militär-Schulen. Mit 1 Figurentafel. gr. 8. 7½ Sgr.
La Croix, Sylv. Fr., Anfangsgründe der Arithmetik. Nach der 17ten Originalausgabe aus dem Französischen übersetzt, und mit einigen Anmerkungen versehen. gr. 8. 20 Sgr.
— — die Anfangsgründe der Algebra. Aus dem Französischen übersetzt nach der zwölten verbesserten und vermehrten Ausgabe, von J. Ph. Gruson. gr. 8. 1 Thlr. 10 Sgr.
Auch unter dem Titel:
Sylv. Fr. Lacroix's Algebra. Erster Theil. Anfangsgründe ꝛc.
Derselben 2r. Band oder weitere Ausführung, übersetzt von Elk. Marc. Hahn. 8. 1 Thlr. 20 Sgr.
— — Lehrbuch der Elementar-Geometrie. (Nach der 13ten Auflage aus dem Französischen) neu übersetzt und mit Anmerkungen versehen von L. Ideler. gr. 8. Mit 7 Kupfertafeln. 1 Thlr. 10 Sgr.

In demselben Verlage sind folgende mathematische Bücher erschienen:

Magnus, L. Imm., Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie (der Ebene). Mit 4 Kupfertafeln. Lex. 8. 2 Thlr. 25 Sgr.

— — Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes. Erste Abthlg. Lex. 8. 2 Thlr. 25 Sgr.

Plücker, Dr. Jul., System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend. Mit 6 Kupfertafeln. gr. 8. 3 Thlr. 15 Sgr.

Hirsch, Meier, Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Sechste durchgesehene Aufgabe. gr. 8. 1 Thlr. 10 Sgr.

Fortsetzung der Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra; oder Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. 1r. Theil. 8. 1809. 1 Thlr. 20 Sgr.

Sammlung geometrischer Aufgaben.

Erster Theil (Planimetrie und Trigonometrie). Mit 10 Kupfertafeln. 8. 1805. 1 Thlr. 20 Sgr.

Zweiter Theil (Polygonometrie, Stereometrie, sphär. Trigonometrie). Mit 10 Kupfertafeln. 8. 1807. 1 Thlr. 20 Sgr.

Integral-Tafeln, oder Sammlung von Integral-Formeln. gr. 8. 3 Thlr.

Egen, P. N. C., Handbuch der allgemeinen Arithmetik. Besonders in Beziehung auf die „Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra von Meier Hirsch.“ Theil I. Die Buchstabenrechnung. Zweite verbesserte Aufl. Mit Königl. Würtemb. Privilegium gegen den Nachdruck. Mit 1 Kpfr. gr. 8. 2 Thlr.

— — desselben Werkes Thl. II. die Algebra. Zweite verbesserte Aufl. Mit 4 Kpfrn. gr. 8. 2 Thlr. 10 Sgr.

Sachs, Sal., Auflösungen der in Meier Hirsch's Sammlung aus der Buchstabenrechnung und Algebra enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. 5te verbesserte Auflage. 8. 1 Thlr. 20 Sgr.

Boltze, H. L. Lehrbuch der Statik und Mechanik fester Körper für Schulen und den Selbstunterricht. Mit Kupfertafeln gr. 8. 26½ Sgr.

Gruson, J. Ph., die Kegelschnitte; elementarisch, geometrisch, algebraisch, zum Behuf der Vorlesungen abgehandelt. 8. Mit 4 Kpfn. 1 Thlr. 10 Sgr.

Huberdt, A., Elemente der ebenen Trigonometrie nebst praktischen Aufgaben für Gymnasien und höhere Bürger- und Militär-Schulen. Mit 1 Figurentafel. gr. 8. 7½ Sgr.

La Croix, Sylv. Fr., Anfangsgründe der Arithmetik. Nach der 17ten Originalausgabe aus dem Französischen übersetzt, und mit einigen Anmerkungen versehen. gr. 8. 20 Sgr.

— — die Anfangsgründe der Algebra. Aus dem Französischen übersetzt nach der zwölten verbesserten und vermehrten Ausgabe, von J. Ph. Gruson. gr. 8. 1 Thlr. 10 Sgr.

Auch unter dem Titel:

Sylv. Fr. Lacroix's Algebra. Erster Theil. Anfangsgründe rc.

Derselben 2r. Band oder weitere Ausführung, übersetzt von Elk. Marc. Hahn. 8. 1 Thlr. 20 Sgr.

— — Lehrbuch der Elementar-Geometrie. (Nach der 13ten Auflage aus dem Französischen) neu übersetzt und mit Anmerkungen versehen von L. Ideler. gr. 8. Mit 7 Kupfertafeln. 1 Thlr. 10 Sgr.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Der Geist der mathematischen Analysis und ihr Verhältniß zur Schule

Bd.: 1

Berlin 1842

Math.p. 382 fg-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082503-0